

* Idag: Tentaräkning
F27 Frågestund

* Exempeltenta (se separat dokument)

Notera: Endast svar på uppg. 1-10

1. $x^3 > 4x$

Two fall: $x < 0$, $x > 0$, ($x \neq 0$)

Fall 1: $x < 0$

$$x^3 > 4x$$

$$x^2 < 4$$

$$|x| < 2, \text{ men } x < 0$$

$$\Rightarrow -2 < x < 0$$

Fall 2: $x > 0$

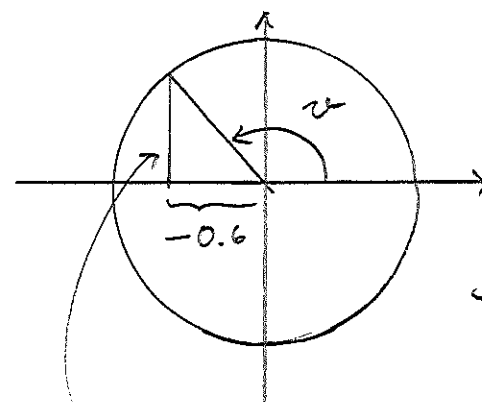
$$x^3 > 4x$$

$$x^2 > 4$$

$$|x| > 2, \text{ men } x > 0$$

$$\Rightarrow x > 2 \quad \therefore \text{Svar: } \underline{\underline{-2 < x < 0 \vee x > 2}}$$

2. $\tan(\cos^{-1}(-0.6)) = ?$



$$\tan v = \frac{0.8}{-0.6} = \underline{\underline{-\frac{4}{3}}}$$

Svar: -4/3

$$\sqrt{1 - 0.6^2} = \sqrt{1 - 0.36} = \sqrt{0.64} = 0.8$$

3. $f(x) = \sqrt{x}$, $I = [1, 2]$

$$L_f = \max_I |f'(x)| = \max_I \frac{1/2}{\sqrt{x}} = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}$$

Svar: $L_f = \frac{1}{2}$

4. function $y = \text{myabs}(x)$

if $x \geq 0$

$y = x;$

else

$y = -x;$

end

$$5. \quad f(x) = x^3 + x - 9$$

$$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 1$$

$$y = 1 \Leftrightarrow x^3 + x - 9 = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{3 \cdot 2^2 + 1} = \frac{1}{13}$$

Svar: 1/13

$$6. \quad f(x) = 2^{(x+1)(x-1)}$$

$$= \exp(\ln 2 \cdot (x+1)(x-1))$$

$$\Rightarrow f'(x) = \exp(\ln 2 \cdot (x+1)(x-1)) \cdot$$

$$\cdot \ln 2 \cdot (x-x+ x+x)$$

$$= \underline{2x \ln 2 \cdot 2^{(x+1)(x-1)}}$$

(Kan förenklas ytterligare: $x \cdot \ln 2 \cdot 2^{x^2}$.)

Svar: $2x \ln 2 \cdot 2^{(x+1)(x-1)}$

$$7. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - \tan x} \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{1 - \frac{1}{\cos^2 x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \cos^3 x}{\cos^2 x - 1}$$

$$\stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x \cdot (-\sin x) - 3 \cos^2 x \cdot (-\sin x)}{2 \cos x \cdot (-\sin x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x - 3 \cos^2 x}{2 \cos x} = \frac{2-3}{2} = -\frac{1}{2}$$

Svar: -1/2

$$8. \quad f(x) = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2 \cos 2x$$

$$\Rightarrow f''(x) = -4 \sin 2x$$

$$\Rightarrow P_2(x) = \sin 2 + 2 \cos 2 \cdot (x-1) - \frac{1}{2} \cdot 4 \sin 2 \cdot (x-1)^2$$

$$\Rightarrow P_2(2) = \sin 2 + 2 \cos 2 - 2 \sin 2 = \underline{2 \cos 2 - \sin 2}$$

Svar: $2 \cos 2 - \sin 2$

$$\begin{aligned}
 9. \quad & \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^3}{2^6 3!} + \frac{\pi^5}{2^{10} 5!} - \dots \\
 &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{1}{5!} \left(\frac{\pi}{4}\right)^5 - \dots \\
 &= \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \underline{\underline{1/\sqrt{2}}}
 \end{aligned}$$

Svar: $1/\sqrt{2}$

$$10. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x+2}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n 2^n}}_{=a_n} \cdot (x+2)^n$$

Kvottest för potensserier:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1/((n+1) \cdot 2^{n+1})}{1/(n \cdot 2^n)} =$$

$$= \frac{n \cdot 2^n}{(n+1) \cdot 2^{n+1}} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} = L$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{L} = \underline{\underline{2}}$$

Svar: $R=2$

11. Program

$x = 1;$

$\text{tol} = 1e^{-10};$

$dx = 1.5;$

while $\text{abs}(dx) > \text{tol}$

$dx = -(x^2 - 2) / 2x; \% \text{ Newton}$

$x = x + dx;$

end

Beris:

$$g(x) = x - \frac{x^2 - 2}{2x} = \frac{2x^2 - x^2 + 2}{2x} = \frac{x^2 + 2}{2x} = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow |g'(x)| < 1 \text{ för } \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} > -1 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} < \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow |g'(x)| < 1 \text{ för } x > 1. \quad \Leftrightarrow |x| > \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Tag $I = [1, 2]$. Måste visa att $g: I \rightarrow I$,

dvs $x \in I \Rightarrow g(x) \in I$.

Undersök ändpunkterna $x=1$, $x=2$ samt
kritisk punkt $x=\sqrt{2}$:

$$g(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{1} = 1.5 \in I$$

$$g(2) = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = 1.5 \in I$$

$$g(\sqrt{2}) = \sqrt{2} \in I$$

$$\Rightarrow g: I \rightarrow I \text{ och } |g'(x)| \leq \frac{1}{2} < 1 \text{ på } I.$$

$\Rightarrow g$ kontraktion på I .

$\Rightarrow$ Iterationen konvergerar mot fixpunkten
 $x=\sqrt{2}$ enligt Banachs fixpunktsats.

12. Se föreläsning F22!

$$13. f(x) = x^\alpha, x \in [\varepsilon, 1]$$

$$\alpha, \varepsilon \in (0, 1)$$

$$f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1} > 0$$

$\nwarrow \alpha-1 < 0$

$$f''(x) = \underbrace{\alpha}_{>0} \underbrace{(\alpha-1)}_{<0} \underbrace{x^{\alpha-2}}_{>0} < 0$$

$\Rightarrow$ Maximum för $|f'(x)|$ antas i
vänster ändpunkt $x=\varepsilon$.

$$\Rightarrow L_f = \max_{[\varepsilon, 1]} |f'| = \alpha \varepsilon^{\alpha-1} < \infty$$

enligt medelvärdessatsen.

$\Rightarrow$ Funktionen f är Lipschitz-
kontinuerlig på $I = [\varepsilon, 1]$.

$$14. \quad f(x) = \sin(\ln(x))$$

$$f'(x) = \frac{\cos(\ln x)}{x}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-\sin(\ln x) \cdot \frac{1}{x} \cdot x - \cos(\ln x) \cdot 1}{x^2} \\ &= - \frac{\sin(\ln x) + \cos(\ln x)}{x^2} \end{aligned}$$

Inflexionspunkt då $f''(x) = 0$:

$$\underbrace{\sin(\ln x)}_y = - \underbrace{\cos(\ln x)}_y$$

$$\sin y = -\cos y$$

$$y = \frac{3\pi}{2} + n \cdot \pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\ln x = \frac{3\pi}{2} + n \cdot \pi$$

$$x = e^{\frac{3\pi}{2} + \pi \cdot n}$$

Svar: Oändligt många inflexionspunkter
i $x = e^{\frac{3\pi}{2} + \pi n}, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Lösning av några utvalda uppgifter
(efter förslag från klassen):

* Örning 5 (benislista): Cauchy

Visa att om $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = \bar{x}$ så är $\{x_i\}$
en Cauchy-följd.

Betrakta $|x_i - x_j|$:

$$|x_i - x_j| = |x_i - \bar{x} + \bar{x} - x_j|$$

$$\leq |x_i - \bar{x}| + |\bar{x} - x_j| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

om $i, j \geq N$ och N väljs så att

$$|x_i - \bar{x}| < \varepsilon \text{ för } i \geq N,$$

vilket är möjligt, ty $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = \bar{x}$.

* Adams 4.10.9 (error bounds Taylor)

Beräkna feluppskattning för $P_2(9)$
för $f(x) = x^{1/3}$ och $\bar{x} = 8$.

$$f(x) = x^{1/3} \quad f(8) = 2$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} x^{-2/3} \quad f'(8) = \frac{1}{3} \cdot 8^{-2/3} = \frac{1}{12}$$

$$f''(x) = -\frac{2}{9} x^{-5/3} \quad f''(8) = -\frac{2}{9} \cdot 8^{-5/3} = -\frac{1}{144}$$

$$f'''(x) = \frac{10}{27} x^{-8/3}$$

$$\Rightarrow P_2(9) = 2 + \frac{1}{12} \cdot (9-8) + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{144}\right) \cdot (9-8)^2 \\ = 2 + \frac{1}{12} - \frac{1}{288} = 2 \frac{23}{288}$$

$$\Rightarrow 9^{1/3} = 2 \frac{23}{288} + \frac{1}{6_3} \frac{10}{27} \xi^{-8/3} \cdot (9-8)^3 \\ = 2 \frac{23}{288} + \frac{5}{81} \xi^{-8/3}, \quad \xi \in (8, 9) \\ \xi^{-8/3} \in \left(9^{-8/3}, 8^{-8/3}\right) = \left(9^{-8/3}, \frac{1}{256}\right)$$

Enkel uppskattning:

$$\xi^{-8/3} \in (0, \frac{1}{256})$$

(Notera: Den (över-)ambitiösa kan också göra en skarpare uppskattning genom att bestämma en undre begränsning för $q^{-8/3}$ baserat på uttrycket för $q^{1/3}$!)

Svar:

$$\underline{q^{1/3} \in (2 \frac{23}{288}, 2 \frac{23}{288} + \frac{5}{8 \cdot 256})}$$

* Duggans MacLaurin-uppgift

Kan ej räkna den ifall någon vill lämna in lösning!

* Hitta bästa Lipschitz-konstant

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad I = [1, 2]$$

Exempel 1:

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= |\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| \\ &= \left| \frac{(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \cdot |x_1 - x_2| \end{aligned}$$

Måste gälla på hela intervallet!
Blir som störst (värst) då $x_1 = x_2 = 1$

$$\Rightarrow L_f = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$

(Samma svar om vi deriverar och bestämmer $\max |f'|$.)

Exempel 2:

$$f(x) = \frac{1}{x+1}, \quad I = [1, 2]$$

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left| \frac{1}{x_1+1} - \frac{1}{x_2+1} \right|$$

$$= \frac{|x_2+1 - (x_1+1)|}{(x_1+1) \cdot (x_2+1)} = \frac{1}{(x_1+1)(x_2+1)} \cdot |x_1 - x_2| \quad (*)$$

$$\leq \frac{1}{x_1 x_2} \cdot |x_1 - x_2| \leq \frac{1}{1 \cdot 1} \cdot |x_1 - x_2|$$

↑
Worst case: $x_1 = x_2 = 1$

$\Rightarrow Lf = 1$ är en Lipschitz-konstant.

Men är det den bästa?

Nej! Ty om vi går tillbaka till (*)

kan vi göra den skarpare uppskattningen

$$\frac{1}{(x_1+1)(x_2+1)} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$\Rightarrow Lf = \frac{1}{4}$ är en bättre = mindre

Lipschitz-konstant!

Samma sak med derivata:

$$f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow |f'(x)| \leq \frac{1}{(1+1)^2} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

* "Något med summor" / jämförelsetest

Adams 9.3.6

$$\sum_{n=8}^{\infty} \frac{1}{\pi^n + 5}$$

$$0 \leq a_n = \frac{1}{\pi^n + 5} \leq \frac{1}{\pi^n} = \left(\frac{1}{\pi}\right)^n = b_n$$

$\sum b_n$ geometrisk serie

med $r = \frac{1}{\pi} < 1 \Rightarrow$ konvergerar

Jämförelsetest I $\Rightarrow \sum a_n$ konvergerar.

* Kvadratisk konvergens

Newton konvergerar kvadratisk:

$$|e_n| \leq C \cdot |e_{n-1}|^2$$

för någon konstant $C > 0$

$$\begin{cases} e_n = x_n - \bar{x} \\ e_{n-1} = x_{n-1} - \bar{x} \end{cases}$$

* Derivata av komplicerad funktion som innehåller absolutbelopp

$$f(x) = e^{|\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}|} / \tan(\ln x)$$

Fall 1: $\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}} \geq 0$

$$\Leftrightarrow \sin x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow x \in [\pi/4 + 2\pi n, 3\pi/4 + 2\pi n]$$

$$n \in \mathbb{Z}$$

$$f(x) = e^{\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}} / \tan(\ln x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{e^{\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot \cos x \cdot \tan \ln x - e^{\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \ln x} \cdot \frac{1}{x}}{\tan^2 \ln x}$$

$$= \frac{e^{\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot (x \cos^2 \ln x \cdot \cos x \cdot \tan \ln x - 1)}{\tan^2 \ln x \cdot x \cos^2 \ln x}$$

$$= \frac{e^{\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot (x \cos x \cdot \sin \ln x \cdot \cos \ln x - 1)}{x \cdot \sin^2 \ln x}$$

Fall 2: Behandlas på motsvarande sätt* Uppgift 4b, Övningseneta 2012-01-14

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\sin(3x)}$$

Använd Taylors formel:

$$e^{2x} - 1 = 1 + 2x + \mathcal{O}(x^2) - 1 = 2x + \mathcal{O}(x^2)$$

$$\sin(3x) = 3x + \mathcal{O}(x^3)$$

$$\Rightarrow \frac{e^{2x} - 1}{\sin 3x} = \frac{2x + O(x^2)}{3x + O(x^2)}$$

$$= \frac{2 + O(x)}{3 + O(x^2)} \rightarrow \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

då $x \rightarrow 0$.

* Övning 11 (benislutan)

$$x^4 = 16$$

$$x = g(x) = x + \alpha \cdot (x^4 - 16)$$

Experimentera numeriskt:

$$\alpha = -0.01 \quad \underline{\underline{\text{funkar bra.}}}$$

Alternativ: Använd Newtons metod, ger

$$\alpha = -\frac{1}{f'(x)} = -\frac{1}{4x^3}$$

Indikerar att

$$\alpha = -1/32 = -0.03125$$

är ett bra val.

* Övning 13:

Per definition:

$$\underbrace{((b-1)(b-1)(b-1) \dots (b-1))}_n = \sum_{k=0}^{n-1} (b-1) \cdot b^k$$

n siffror

$$= (b-1) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} b^k = \{\text{geometrisk summa}\}$$

$$= (b-1) \cdot \frac{1-b^n}{1-b} = b^n - 1.$$

Exempel:

$$999_{10} = 1000 - 1 = 10^3 - 1$$

$$1111111_2 = 256 - 1 = 2^8 - 1$$

* Övning 15:

$$f(x) = x^2$$

$$f: X \rightarrow Y$$

$$(i) X = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}$$

ej surjektiv, ty $-1 \in Y$ men $-1 \notin \mathbb{R}(f)$

ej injektiv, ty $-1, 1 \in X$ och $f(1) = f(-1)$

$$(ii) X = \mathbb{R}, Y = [0, \infty)$$

surjektiv, ty $\forall y \in Y \exists x \in X: f(x) = y$ ($x = \sqrt{y}$)

ej injektiv på samma sätt som i (i)

$$(iii) X = [0, \infty), Y = \mathbb{R}$$

ej surjektiv på samma sätt som i (i)

injektiv, ty strängt växande på X

$$(iv) X = [0, \infty), Y = [0, \infty)$$

surjektiv och injektiv på samma sätt som i (ii) resp. (iii)

$\Rightarrow$ bijektiv och därmed existerar inversen $\sqrt{x}$.

* Adams/Essex 9.2.11 (9.2.13)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots$$

$$a_n = \frac{1}{n \cdot (n+2)} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) / 2$$

$$\Rightarrow 2S_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right)$$

$$+ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) + \dots$$

$$\dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$$

$$\rightarrow 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \text{ då } n \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow S_n \rightarrow 3/4$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = 3/4$$

Lycka till
på
tentan!
 Anders

P.S. När ni lärt er att
integrera i läsperiod II, så
missa inte att lära er att lösa
den klassiska Chalmersintegralen!

$$\int \sqrt{1-x^2} dx$$

(Ett mycket uppskattat partytrick!;-)