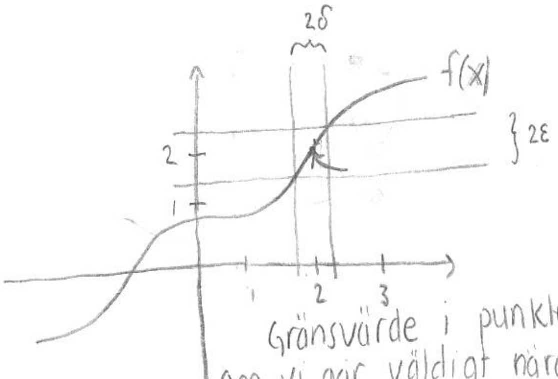
ÖS. GRÄNSVÄRDEN   A.1.2. {23, 54, 74}, A.1.5. {2, 6}

- Presentera mig, frida.svelander@fcc.chalmers.se
- Dagens tema - gränsvärden. Kommer räkna
- RÖ kommer vara att jag räknar uppgifter på tavlan ungefär första timmen, sedan räkna själva. Uppg. från calculus / kompendiet.

DEF. Gränsvärde

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ if $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ such that $0 < |x-a| < \delta$

$\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

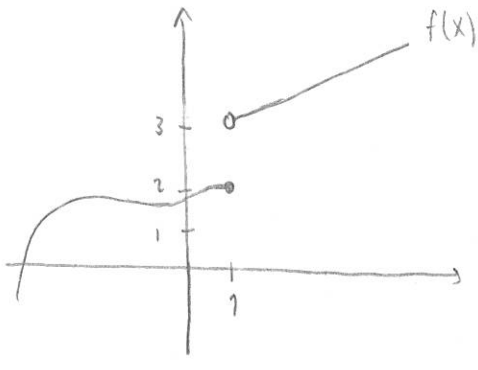


Gränsvärde i punkten 2. Om vi går väldigt nära 2 från båda håll längs funktionskurvan och vi närmar oss ett entydigt värde så är det gränsvärdet.

Ensidigt gränsvärde

$\lim_{x \to a-} f(x) = L$ if $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$:

$a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$



I detta fall saknas gränsvärde i punkten 2, för när vi närmar oss från de två hållen får vi olika resultat. Däremot har funktionen ett höger och vänstergränsvärde där

1.2.23. $\boxed{\lim_{t\to 1} \frac{t^2-1}{t^2-2t+1}}$

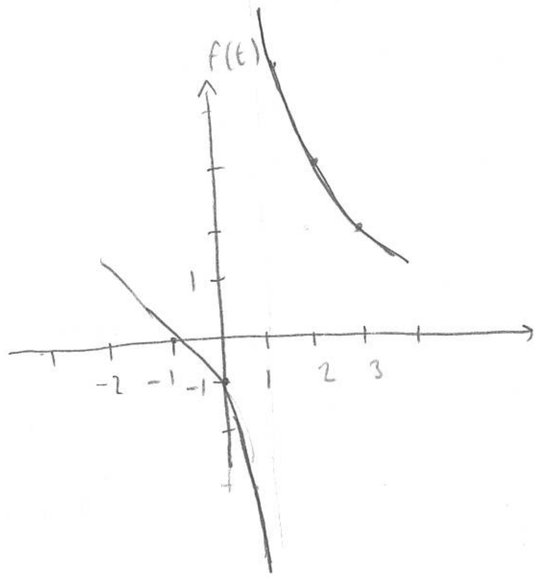
- Om en fkn definierad i en omgivning kring en punkt och beter sig "snällt" är gränsvärdet i punkten detsamma som funktions värdet. Är det så i detta fallet?
- ser att t ska gå mot 1, och det som kan bli problem är nämnaren.
- Gränsvärdet kan finnas ändå om täljaren också noll i 1. Det är den!
- Försök förkorta bort singulariteten i 1.

$$\boxed{\lim_{t\to 1} \frac{t^2-1}{t^2-2t+1} = \lim_{t\to 1} \frac{(t-1)(t+1)}{(t-1)^2} = \lim_{t\to 1} \frac{t+1}{t-1}}$$

- Nämnaren går fortf. mot noll, har vi då hittat att gränsvärdet är ∞?

täljaren $t+1 \to 2$, då $t \to 1$ (både från vänster och höger)

nämnaren $t-1 \to 0-$ från vänster och $t-1 \to 0+$ från höger



Därmed är

$$\lim_{t\to 1-} \frac{t^2-1}{t^2-2t+1} = -\infty$$

$$\lim_{t\to 1+} \frac{t^2-1}{t^2-2t+1} = \infty$$

och gränsvärdet existerar inte!

1.2.54. $\boxed{\lim_{x \to 0-} \sqrt{x^3 - x}}$

- Vad är problemet här? $\sqrt{\ }$ definierad i 0, men inte för negativa argument.
- Måste kolla att $f(x) = \sqrt{x^3 - x}$ definierad till vänster om 0, dvs så det kan finnas ett $\delta > 0$ s.t. $f(x)$ definierad för $-\delta < x < 0$ och $|f(x) - 0| < \varepsilon$ ...

$$x^3 - x = \underbrace{x}_{<0}\underbrace{(x^2-1)}_{<0} > 0 \quad \text{för} \quad -\delta < x < 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0-} \sqrt{x^3 - x} = 0$$

1.2.74. Hitta $\lim_{x \to 0} f(x)$ då $\sqrt{5 - 2x^2} \leq f(x) \leq \sqrt{5 - x^2}$ för $x \in [-1, 1]$.

<u>Instängningsregeln</u>

Om $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ $\forall x \in I$ utom möjligtvis a, där I är ett öppet intervall som innehåller a och $\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$ så är

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

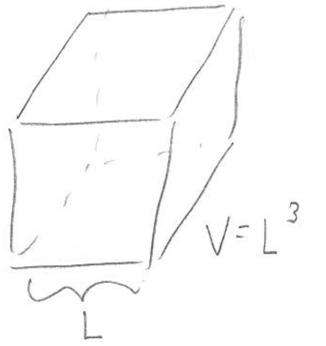
Låt $I = (-1, 1)$, $a = 0$. Då gäller $a \in I$.

Vi vet att $\lim_{x \to 0} \sqrt{5 - 2x^2} = \sqrt{5}$ och $\lim_{x \to 0} \sqrt{5 - x^2} = 0$ (inga konstigheter runt 0 och vet att funktionerna definierade där från uppg. formuleringen)

Enligt instängningsregeln gäller att $\lim_{x \to 0} f(x) = \sqrt{5}$

Obs! Viktigt betona enl. instängningsregeln och visa att alla förutsättningar är uppfyllda. Gäller generellt då man använder en sats.

1.5.2. Vilket är det största tillåtna felet på den 20 cm långa sidan i en kubisk box om boxens volym måste ligga inom 1.2% från 8000 cm^3?



$$|V - 8000| \leq 0.012 \cdot 8000 = 96 = \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow$$

$$-96 \leq L^3 - 8000 \leq 96$$

$$\Leftrightarrow$$

$$8000 - 96 \leq L^3 \leq 8000 + 96$$

$$\Leftrightarrow$$

$$7904^{1/3} \leq L \leq 8096^{1/3}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$19.91968 \leq L \leq 20.07968$$

$$\Leftrightarrow$$

$$-0.08032 \leq L - 20 \leq \underline{\underline{0.07968}}$$

Den högra gränsen mest begränsande, så ta $\delta = 0.07968$. Då håller

$$|L - 20| < \delta \Rightarrow |V - 8000| < \varepsilon$$

1.5.6. I vilket intervall måste x ligga om $|f(x) - L| < \varepsilon$ ska gälla, då $f(x) = \frac{1}{x}$, $L = -2$ och $\varepsilon = 0.01$?

- skriv ned vad vi vet ska hålla och lös för värdena på x.

$$\left| \frac{1}{x} - L \right| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < \frac{1}{x} - L < \varepsilon \Leftrightarrow L - \varepsilon < \frac{1}{x} < L + \varepsilon$$

$\Leftrightarrow$ { $L - \varepsilon = -2.01 < 0$ och $L + \varepsilon = -1.99 < 0$, byt håll på olikheten då man tar inversen }

$\Leftrightarrow \frac{1}{L+\varepsilon} < x < \frac{1}{L+\varepsilon}$ Med värden $x \in [-0.5025, -0.4975]$