Ö.6. KONTINUITET, LIPSCHITZKONTINUITET

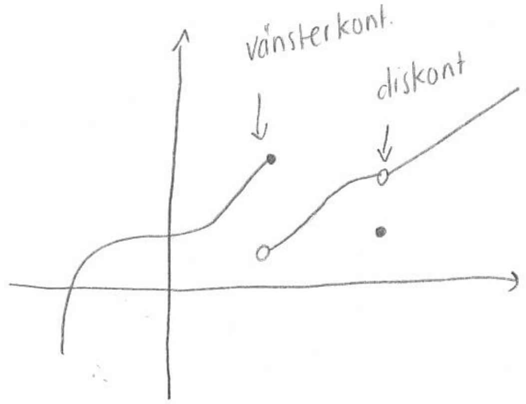
• A.1.4.18, BM.2.{2,4}

DEF. Kontinuitet

$f(x)$ är kontinuerlig i en punkt $a \in D(f)$ om $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Höger- / vänsterkontinuitet

$f(x)$ höger-/vänsterkontinuerlig i en punkt $a \in D(f)$ om $\lim_{x \to a+/-} f(x) = f(a)$



Lipschitzkontinuitet

• Om en funktion är kontinuerlig kan den även vara Lipschitzkontinuerlig.

$f(x)$ är Lipschitz på intervallet I om $\forall x_1, x_2 \in I$

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \quad , \text{ för något } L \geq 0$$

1.4.18. Hitta m så att $g(x) = \begin{cases} x - m, & x < 3, \\ 1 - mx, & x \geq 3 \end{cases}$ är kontinuerlig för alla x.

• $x - m$, $1 - mx$ polynom, så de är var för sig kontinuerliga.

• problem vid övergangen dem emellan då $x = 3$.

• Om kontinuerlig måste höger- och vänstergränsvärdena vara samma och lika som funktionsvärdet i varje punkt, $\lim_{x \to 3-} g(x) = \lim_{x \to 3+} g(x) = g(3) = 1 - 3m$.

$$3 - m = 1 - 3m \iff 2m = -2 \iff \underline{\underline{m = -1}}$$

BM. 2.2. Bestäm en Lipschitzkonstant till $h(x) = \frac{1}{x}$ på $[1,10] = I$.

Tag $x_1, x_2 \in I$.

$$|h(x_1) - h(x_2)| = \left|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right| = \{\text{gemensam nämnare}\} = \left|\frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2}\right| =$$

$$\frac{1}{x_1 x_2}|x_1 - x_2| \leq 1 \cdot |x_1 - x_2| \Rightarrow L_h = 1.$$

Använd även sats 3. i BM.

Antag f, g Lipschitz på I med konstanter L_f, L_g och att f, g är begränsade på I med begränsningar M_f, M_g. Om $|g(x)| \geq a \ \forall x \in I$ för något $a > 0$ gäller att

$\frac{f}{g}$ är Lipschitz på I med konstant $L = \frac{M_f L_g + M_g L_f}{a^2}$

Låt $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $f(x) = 1$, $g(x) = x$

f är Lipschitz med $L_f = 0$ på I eftersom

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |1 - 1| = 0 = 0|x_1 - x_2| \ , \ \forall x_1, x_2 \in I$$

g är Lipschitz med $L_g = 1$ på I eftersom

$$|g(x_1) - g(x_2)| = |x_1 - x_2| = 1 \cdot |x_1 - x_2| \ , \ \forall x_1, x_2 \in I$$

Eftersom f och g är begränsade på I, $M_f = 1$, $M_g = 10$, och $|g| \geq 1$ på I gäller enligt sats 3 i BM

$$L = \frac{1 \cdot 1 + 10 \cdot 0}{1 \cdot 1} = 1.$$

BM 2.4. Bestäm en Lipschitzkonstant till $h(x) = \sqrt{x}$ på $I = [0.01, 1]$.

Tag $x_1, x_2 \in I$.

$$|h(x_1) - h(x_2)| = |\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| = \left| \frac{(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \right|$$

$$= \left| \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \right| = \frac{1}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} |x_1 - x_2| \leq \frac{1}{\sqrt{0.01} + \sqrt{0.01}} |x_1 - x_2|$$

$$= 5|x_1 - x_2| \Rightarrow L = 5$$