

Ö.14. INVERSA FUNKTIONER

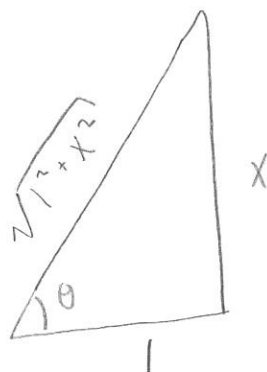
A.3.3.33 Derivera $\ln \ln x$.

$$\frac{d}{dx} \ln(\ln x) = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln x}$$

↑
inre derivata

A.3.5.15. Förenkla $\cos(\tan^{-1} x)$.

Låt $\theta = \tan^{-1} x$ = den vinkel θ
som gör att $\tan \theta = x \Rightarrow$



vi ser från figuren att

$$\cos \theta = \cos(\tan^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

A.3.5.31. Derivera $y = \sqrt{a^2 - x^2} + a \sin^{-1} \frac{x}{a}$, $a > 0$ och förenkla så långt
som möjligt.

Låt $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$, $g(x) = \sin^{-1} \frac{x}{a}$ och $y = f(x) + ag(x)$.

Då är $y' = f'(x) + ag'(x)$ där

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{a^2 - x^2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$g'(x): \quad g = \sin^{-1} \frac{x}{a} \Rightarrow \frac{x}{a} = \sin g \Rightarrow x = a \sin g$$

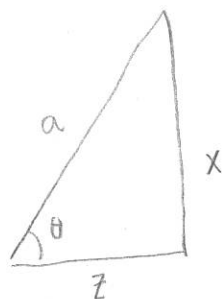
Derivera implicit m.p. x .

$$\frac{d}{dx} x = \frac{d}{dx} a \sin g(x) \Leftrightarrow 1 = a \cos[g(x)] g'(x)$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{1}{a \cos[g(x)]} = \frac{1}{a \cos[\sin^{-1} \frac{x}{a}]} \quad (*) \rightarrow$$

Låt $\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) = \theta =$ den vinkeln θ

så att $\sin \theta = \frac{x}{a} \Rightarrow$



Figuren ger att $\cos \theta =$

$$\cos \left[\sin^{-1} \frac{x}{a} \right] = \frac{z}{a} = \left\{ z^2 + x^2 = a^2 \Rightarrow z = \sqrt{a^2 - x^2} \right\}$$
$$= \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$$

Sätter vi in detta i $\textcircled{4}$ får vi

$$g'(x) = \frac{1}{a \cdot \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad \text{och}$$

$$y' = f'(x) + a \cdot g'(x) = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{a - x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \text{konjugatregeln}$$

$$= \frac{a - x}{\sqrt{a - x} \sqrt{a + x}} = \sqrt{\frac{a - x}{a + x}}$$

Annan variant: Använd att $\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Vi har $g(x) = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$, så $g'(x) = \frac{d}{dx} \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) = \int \frac{d}{dx} \sin\left(\frac{x}{a}\right) = \cos \frac{x}{a}$

$$= \boxed{\frac{1}{a}} \cdot \frac{1}{\cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right)} = \left\{ \text{se figur ovan} \right\} = \frac{1}{a} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} =$$

$\uparrow$ inre derivata från $\textcircled{1}$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$