

Ö15. LINEARISERING, RELATERADE HASTIGHETER, LHÔPITAL

Linearisering

Lineariseringen $L(x)$ av funktionen f runt punkten a ges av

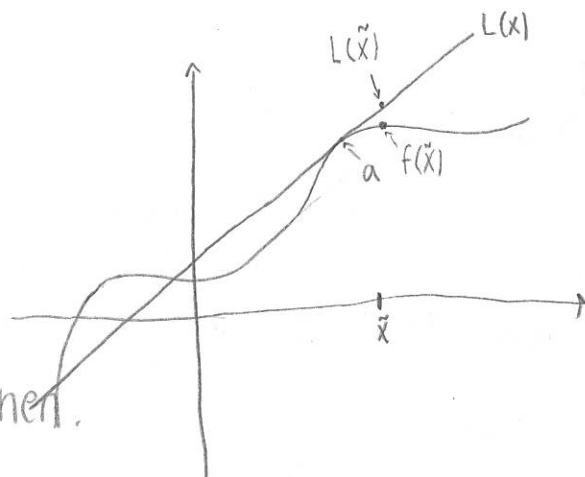
$$L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

Det gäller att

• $f(x) = L(x) + E(x)$,

där $E(x)$ är felet i approximationen.

• $E(x) = \frac{1}{2} f''(\xi)(x-a)^2$, för något $\xi \in (a, x)$



L'Hôpitals regel

Antag att f och g är deriverbara funktioner på (a, b) , och $g'(x) \neq 0$ på (a, b) . Om

• (1) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$ och $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ så är

• $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

(2) $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \pm \infty$ och $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ så är

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

(gäller även för b^- , $c \in (a, b)$ eller $\pm \infty$ ist. för a^+)

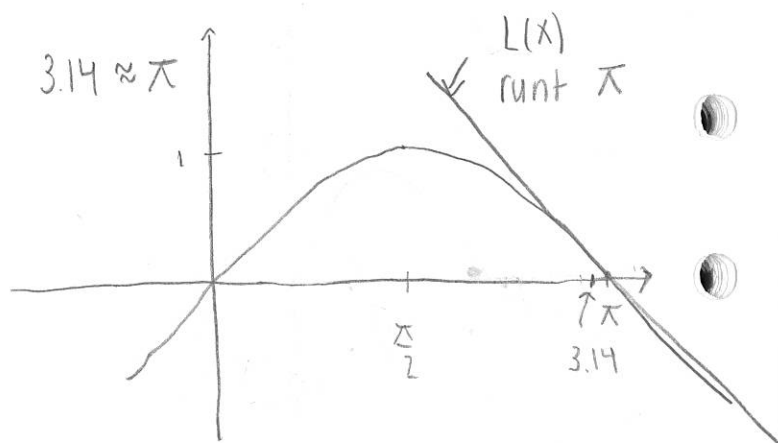
- A.4.9.21. Använd en lämplig linearisering för att approximera $\sin(3.14)$. ①
 ② Bestäm tecknet på feltermen och uppskatta felets storlek. ③
 Specificera vilket intervall $\sin(3.14)$ ligger inom. ④

① Låt $f(x) = \sin(x)$.

Dess linearisering ges av $L(x) = f(a) + f'(a)(x-a) = \sin(a) + \cos(a)(x-a)$.

Vi vill räkna ut $L(3.14)$.

Linearisera runt $a = \pi$ eftersom $3.14 \approx \pi$



$$\begin{aligned} L(3.14) &= \sin(\pi) + \cos(\pi)(3.14 - \pi) \\ &= 0 + (-1)(3.14 - \pi) = \pi - 3.14 \end{aligned}$$

Så $\sin(3.14) = f(3.14) \approx L(3.14) = \underline{\pi - 3.14}$.

② Feltermen $E(x)$ i $f(x) = L(x) + E(x)$ ges av

$$E(x) = \frac{1}{2} f''(\xi)(x-a)^2, \text{ så eftersom } f'(x) = \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

$$E(3.14) = \frac{1}{2} f''(\xi)(3.14 - \pi)^2 = \frac{1}{2} \underbrace{(-\sin(\xi))}_{<0} \underbrace{(3.14 - \pi)^2}_{>0}, \quad \xi \in (3.14, \pi).$$

$E(3.14) < 0$ eftersom $-\sin(\xi) < 0$ och $(3.14 - \pi)^2 > 0$ för $\xi \in (3.14, \pi)$.

③ $|E(x)| = \frac{1}{2} |f''(\xi)| (x-a)^2$, så $|E(3.14)| = \frac{1}{2} |-\sin(\xi)| (3.14 - \pi)^2$

$$\begin{aligned} &= \{ \xi \in (3.14, \pi) \} = \frac{1}{2} \sin(\xi) (3.14 - \pi)^2 < \frac{1}{2} \sin(3.14) (3.14 - \pi)^2 \\ &< \{ E(3.14) < 0 \Rightarrow f(3.14) < L(3.14) \} < \frac{1}{2} (\pi - 3.14) (3.14 - \pi)^2 \end{aligned}$$

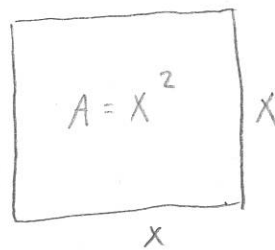
$$= \frac{1}{2} (\pi - 3.14)^3, \text{ så } E(3.14) \in \left(-\frac{1}{2} (\pi - 3.14)^3, 0 \right)$$

$$④ \quad f(3.14) = \sin(3.14) = L(3.14) + E(3.14) \in \left(\pi - 3.14 - \frac{1}{2}(\pi - 3.14)^3, \pi - 3.14 \right)$$

A.4.1.1. Beräkna areaförändringen hos en kvadrat med sidan 8 cm då sidans längd ökar med 2 cm/min.

vi söker $\frac{dA}{dt} = \frac{dx^2}{dt}$ och vi vet att

$$\frac{dx}{dt} = 2.$$



$$\frac{dA}{dt} = \frac{dx^2}{dt} = 2x \frac{dx}{dt}$$

$$\text{vi vet att } x=8, \text{ så } \frac{dA}{dt} = 2 \cdot 8 \cdot 2 = 32 \frac{\text{cm}^2}{\text{min}}$$

4.3.2. Beräkna $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(2x-3)}{x^2-4}$.

sätt $f(x) = \ln(2x-3)$, $g(x) = x^2 - 4$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \ln(2 \cdot 2 - 3) = \ln 1 = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 2^2 - 4 = 0$$

så vi har ett obestämt uttryck $\frac{0}{0}$.

f och g är deriverbara runt $x=2$, så vi kan använda l'Hôpital.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2/(2x-3)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{2x(2x-3)} = \frac{2}{4 \cdot 1} = \frac{1}{2}$$