Ö16. EXTREMVÄRDESPROBLEM

Lokala extremvärden

Funktionen f har ett lokalt maximum (minimum) $f(x_0)$ i x_0 om
$\exists\, h > 0 : \; f(x) \leq (\geq) f(x_0), \; |x - x_0| < h.$

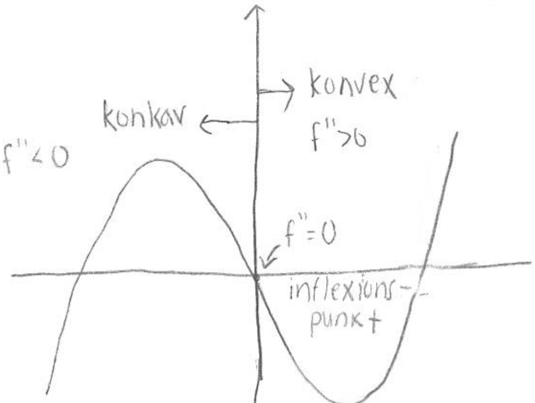
Extrempunkten x_0 kan vara en
(1) kritisk punkt ($f'(x_0) = 0$)
(2) singulär punkt ($f'(x_0)$ ej definierad)
(3) ändpunkt till D_f.

Konvex/konkav funktion

Funktionen f är konvex på intervallet I om
f' är växande på I ($f'' > 0$ på I om f två ggr deriverbar)

f är konkav på I om
f' är avtagande på I ($f'' < 0$ på I om f två ggr deriverbar)

Inflexionspunkt



f har en inflexionspunkt i x_0 om f är deriverbar i x_0 och f går från att vara konvex till konkav eller tvärt om i x_0
(om f är två ggr deriverbar i x_0 så är $f''(x_0) = 0$)

Extremvärdestest med andraderivatan

Antag att $f'(x_0) = 0$. Om
) $f''(x_0) < 0$ har f ett lokalt max i x_0
) $f''(x_0) > 0$ har f ett lokalt min i x_0
) $f''(x_0) = 0$ kan f ha lokalt max, min eller inflexionspunkt i x_0

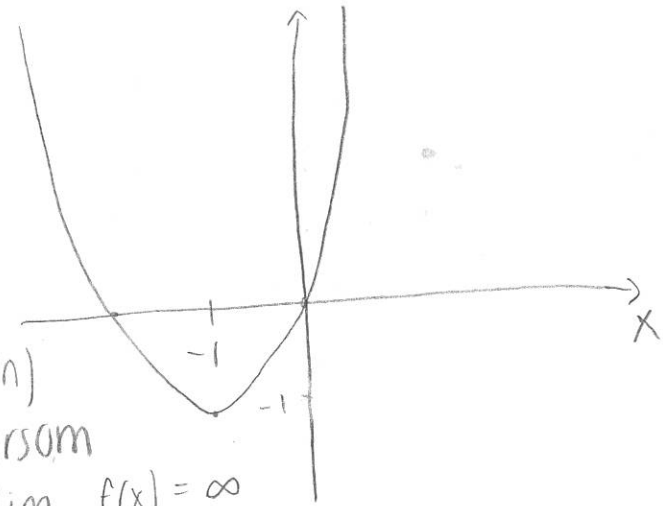
A.4.4.18. Hitta och klassificera alla extremvärden till $f(x) = x^2 + 2x$.
Bestäm om något av extremvärdena är globalt.
Skissa grafen till funktionen.

Kritiska punkter: $f'(x) = 2x + 2 = 2(x+1) = 0 \iff x = -1$

Singulära punkter: Saknas.

Ändpunkter: saknas, kolla vad som händer då $x \to \pm\infty$

x		-1	
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	lokalt min $f(-1) = -1$	$\nearrow$



f har lokalt min i -1 (även globalt min)
och saknar lokala och globala max. eftersom $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty$

$f'' = 2 > 0$.

A.4.5.15. Hitta de intervall där $f(x) = \tan^{-1} x$ är konvex/konkav och
beräkna eventuella inflexionspunkter.

$f(x)$ deriverbar med $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

$f'(x)$ deriverbar med $f''(x) = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$

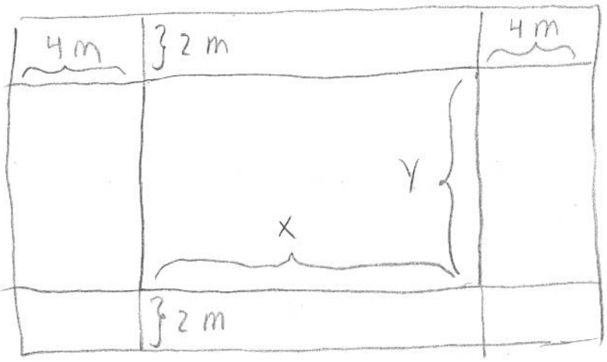
f är konkav på de intervall där $f'' < 0 \Rightarrow f$ konkav på $(0, \infty)$
–‖– konvex –‖– $f'' > 0 \Rightarrow f$ konvex på $(-\infty, 0)$

f har en inflexionspunkt i $x_0 = 0$ eftersom $f''(0) = 0$ och f'' har olika
tecken på olika sidor av 0.

A.4.8.17. En skylt med 100 m^2 tryckt yta och marginaler 2 m i över- och nederkant och 4 m på varje sida ska tillverkas. Beräkna yttermåtten som minimerar skyltens totala area.

$$\min_{xy=100} A(x,y)$$

$$x>0,\ y>0$$



$$\min_{\substack{xy=100\\x,y>0}} A(x,y) = \min_{\substack{xy=100\\x,y>0}} (x+8)(y+4) = \left\{ y=\frac{100}{x} \right\} = \min_{x>0} (x+8)\left(\frac{100}{x}+4\right)$$

$$= \min_{x>0} 100 + 4x + \frac{800}{x} + 32 = \min_{x>0} A(x)$$

$$A'(x) = 4 - \frac{800}{x^2} = 0 \iff x^2 = \frac{800}{4} = 200 \implies x = 10\sqrt{2}$$

$$\implies y = \frac{100}{x} = \frac{100}{10\sqrt{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} = \frac{5\cdot 2}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2} \qquad A''(x) = \frac{1600}{x^3} > 0 \implies \min$$

$\implies$ höjden ska vara $5\sqrt{2}+4$

bredden ska vara $10\sqrt{2}+8$