

Ö18. POTENSSERIER, TAYLORSERIER

En potensserie runt punkten c är en serie på formen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n.$$

Dess konvergensradie R uppfyller att serien konvergerar för alla x med $|x-c| < R$.

Om $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ är $R = 1/L$.

Taylorserien $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n$ är en speciell potensserie med

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}.$$

A.9.5.7. Bestäm centrum, konvergensradie och konvergensintervall för

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+5^n)}{n!} x^n. \quad \left[a_n = \frac{(1+5^n)}{n!} \right]$$

Centrum c : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+5^n)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+5^n)}{n!} (x-0)^n \Rightarrow c=0.$

Konvergensradie: $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(1+5^{n+1}) / (n+1)!|}{|(1+5^n) / n!|}$

$= \{ \text{falla termer större än noll} \} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+5^{n+1}) \cdot n!}{(1+5^n) \cdot (n+1)!}$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+5^{n+1}}{(1+5^n)(n+1)} = \{ \text{dela med största potensen i nämnaren} \}$
 $\frac{5^{n+1}}{(n+1)5^n}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overset{\rightarrow 0}{1/[(n+1)5^n]} + \overset{\rightarrow 0}{5/(n+1)}}{\underset{\rightarrow 0}{1/5^n} + \underset{\rightarrow 1}{1}} = 0$$

$\Rightarrow$ konvergensradie $R = \infty$ ("1/0")

konvergensintervall: $(-R, R) = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

A.9.6.16. Beräkna Taylorutvecklingen till $f(x) = \sin x$ runt $x = \frac{\pi}{2}$.

För vilka x gäller utvecklingen?

$$g(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}f''\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \dots$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

$$f^{(3)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$f^{(4)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Alla jämna derivator innehåller $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ och är ± 1 ,

Alla udda derivator innehåller $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$ och är noll.

$$\Rightarrow f^{(2n)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n \quad (2n \text{ jämnt})$$

$$f^{(2n+1)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad (2n+1 \text{ udda})$$

$$\Rightarrow g(x) = 1 - \frac{1}{2!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4 - \frac{1}{6!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^6 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2n}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{(-1)^n}{(2n)!}$$

Konvergensradie: $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(-1)^{n+1}/(2n+1)!|}{|(-1)^n/(2n)!|}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!}{(2n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} = 0$$

$\Rightarrow R = \infty \Rightarrow$ Taylorutvecklingen konvergerar för alla x

Eftersom $f(x) = \sin(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2}) = [\text{se exempel 2 i kap. 9.6}] = g(x)$

kan vi säga att $f(x) = g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (x - \frac{\pi}{2})^{2n} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

A.9.6.7. Beräkna Maclaurinutvecklingen av $f(x) = \sin x \cos x$.

För vilka x gäller serien?

$$g(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f^{(3)}(0)x^3 + \dots$$

$$f(x) = \sin x \cos x$$

$$f^{(1)}(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$f^{(2)}(x) = 2\cos x(-\sin x) - 2\sin x \cos x = -4\sin x \cos x = -4f(x)$$

$$f^{(3)}(x) = -4f^{(1)}(x) = -4(\cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$f^{(4)}(x) = -4f^{(2)}(x) = (-4)^2 \sin x \cos x = (-4)^2 f(x)$$

$$f^{(5)}(x) = (-4)^2 f^{(1)}(x) = (-4)^2 (\cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$f^{(6)}(x) = (-4)^2 f^{(2)}(x) = (-4)^3 \sin x \cos x = (-4)^3 f(x)$$

$$f(0) = 0$$

$$f^{(1)}(0) = 1 = (-4)^0$$

$$f^{(2)}(0) = 0$$

$$f^{(3)}(0) = -4$$

$$f^{(4)}(0) = 0$$

$$f^{(5)}(0) = (-4)^2$$

$$f^{(6)}(0) = 0$$

Alla jämna derivator är noll, alla udda derivator nollskilda

$$\Rightarrow f^{(2n)}(0) = 0$$

$$f^{(2n+1)}(0) = (-4)^n = (-1)^n \cdot 4^n$$

$$\Rightarrow g(x) = x - \frac{4}{3!} x^3 + \frac{4^2}{5!} x^5 - \frac{4^3}{7!} x^7 + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

konvergensradie:
$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(-1)^{n+1} 4^{n+1} / [2(n+1)+1]!|}{|(-1)^n 4^n / (2n+1)!|}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+1} (2n+1)!}{4^n (2n+3)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{(2n+3)(2n+2)} = 0$$

$\Rightarrow R = \infty \Rightarrow$ Maclaurinutvecklingen konvergerar för alla x .

Eftersom $f(x) = \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$ = [se exempel 2 i kap. 9.6]

= $g(x)$ kan vi säga att $f(x) = g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.