Ö9. (BISEKTION, REELLA TAL,) CAUCHYFÖLJDER

DEF. Cauchyföljd

Talföljden $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ kallas cauchyföljd om $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N$:

$$|a_i - a_j| < \varepsilon \quad , \quad \forall i,j \geq N.$$

exempel $\quad a_j = \frac{1}{2^j} \Rightarrow \{a_j\}_{j=1}^{\infty} = \{\frac{1}{2^j}\}_{j=1}^{\infty} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \dots\dots\}$

Är detta en cauchyföljd? Måste visa att för vilket tal $\varepsilon > 0$ vi än tar är $|a_i - a_j| < \varepsilon$ om i och j är större än något tal N, dvs vi måste hitta N så att detta gäller.

Låt $\varepsilon > 0$ och tag $j > i$. Då gäller

$$|a_i - a_j| = \left| \frac{1}{2^i} - \frac{1}{2^j} \right| = \left\{ j > i \Rightarrow \frac{1}{2^i} > \frac{1}{2^j} \right\} = \frac{1}{2^i} - \frac{1}{2^j} < \frac{1}{2^i} < \varepsilon$$

om $\quad i > \log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$

avrunda uppåt till närmsta heltal

om vi tar $N = \lceil \log_2(\frac{1}{\varepsilon}) \rceil$ är talföljden alltså en cauchyföljd

(Detta används i bisektionsalgoritmen som vi ska jobba med på nästa datorövning.)

BM 4.3 Visa att om $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ är cauchyföljder så är även $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$ en cauchyföljd.

Vad vet vi?

$\{a_n\}$ CF $\Rightarrow \forall \varepsilon_1 > 0 \ \exists N_1 : \quad i,j > N_1 \Rightarrow |a_i - a_j| < \varepsilon_1 \qquad (1)$

$\{b_n\}$ CF $\Rightarrow \forall \varepsilon_2 > 0 \ \exists N_2 : \quad i,j > N_2 \Rightarrow |b_i - b_j| < \varepsilon_2 \qquad (2)$

Vad vill vi visa?

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : |(a_i + b_i) - (a_j + b_j)| < \varepsilon \ , \ \forall i,j > N$

$|a+b| \leq |a| + |b|$

Tag $\varepsilon > 0$: (vill hitta ett N)

$|(a_i + b_i) - (a_j + b_j)| = |(a_i - a_j) + (b_i - b_j)| \leq$ {Triangelolikheten}

$\leq \underbrace{|a_i - a_j|}_{< \varepsilon_1 \text{ om } i,j > N_1} + \underbrace{|b_i - b_j|}_{< \varepsilon_2 \text{ om } i,j > N_2} < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ om $i,j > \max\{N_1, N_2\}$

Låt $N = \max\{N_1, N_2\}$ och tag ε_1 och ε_2 så att $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon$.

Det är möjligt eftersom ① och ② gäller för alla $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$.