

Ö 10. FIXPUNKTITERATION

DEF: En lösning $\bar{x}$ till en ekvation $x=g(x)$ kallas för en fixpunkt till g .
Ekvationen $x=g(x)$ kallas fixpunktsekvation.

BM 5.3. Ekvationen $f(x) = x^3 - 7x + 2 = 0$ kan skrivas som en fixpunktsekvation

$$x = g(x) = \frac{x^3 + 2}{7}.$$

Visa att $g: I \rightarrow I$ är en kontraktionsavbildning på $I = [0, 1]$.

g Lipschitz på I ?

Vill visa att g är Lipschitz på I med konstant $L < 1$ och $g: I \rightarrow I$.

Tag $x_1, x_2 \in I$.

$$\begin{aligned} |g(x_1) - g(x_2)| &= \left| \frac{x_1^3 + 2}{7} - \frac{x_2^3 + 2}{7} \right| = \frac{1}{7} |x_1^3 - x_2^3| = \frac{1}{7} |a^3 - b^3| = \frac{1}{7} |(a-b)(a^2 + ab + b^2)| \\ &= \frac{1}{7} |(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2)| = \frac{1}{7} \underbrace{(x_1^2)}_{\leq 1} \underbrace{(x_1 x_2)}_{\leq 1} \underbrace{(x_2^2)}_{\leq 1} |x_1 - x_2| \\ &\leq \frac{1}{7} (1 + 1 + 1) |x_1 - x_2| = \frac{3}{7} |x_1 - x_2|. \Rightarrow g \text{ Lipschitz på } I \text{ med} \end{aligned}$$

konstant $L = \frac{3}{7} < 1 \Rightarrow g$ är en kontraktionsavbildning på I .

$g: I \rightarrow I$?

Tag $x \in I$. $g(x) = \frac{x^3 + 2}{7}$ är som minst $\frac{0^3 + 2}{7} = \frac{2}{7}$ på I

som störst $\frac{1^3 + 2}{7} = \frac{3}{7}$ på I .

dvs $g(x) \in I$ då $x \in I$.

→ Algoritm för att hitta en fixpunkt till en fixpunktsekvation —

1. välj en startpunkt x_0

2. beräkna $x_i = g(x_{i-1})$ tills konvergens (tills $x_i \approx g(x_i) \forall i > \text{ngt } N$)

$$x_1 = g(x_0), x_2 = g(x_1), \dots$$

När fungerar detta? Om g är en kontraktionsavbildning.

DEF: En funktion g är en kontraktionsavbildning på intervallet I om $g: I \rightarrow I$ är Lipschitz på I med konstant $L < 1$, dvs

$$|g(x_1) - g(x_2)| \leq L |x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in I, \quad \underline{L < 1}$$