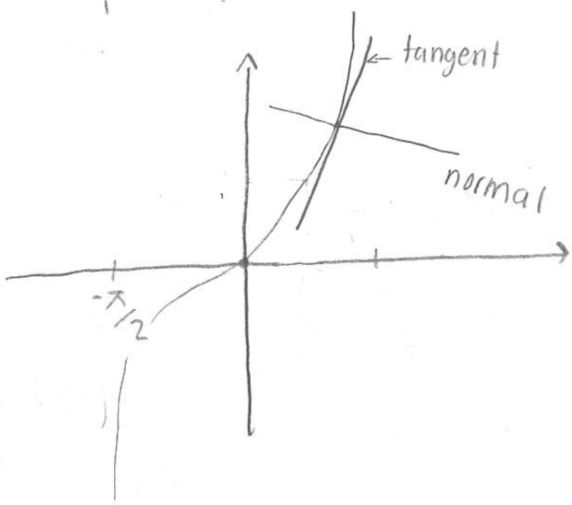
Ö12. MER DERIVATOR

2.5.45 Hitta de punkter på kurvan $y = \tan x$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$,

i vilka tangenten till kurvan är parallell med linjen $y = 2x$.



Lutningen på
tangenten till kurvan y är dess derivata y'.

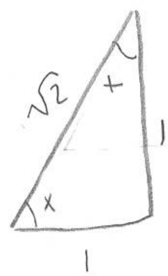
$$y'(x) = D(\tan x) = D\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x(\cos x - \sin x \cdot (-\sin x))}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Parallella linjer ⇒ lutningarna samma, så

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 2 \Rightarrow \cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

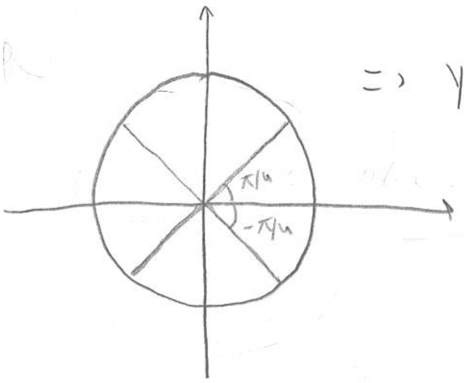
$$\Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow y = \pm 1$$



vinklarna måste vara lika

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$



$P_1 = (\frac{\pi}{4}, 1)$

$P_2 = (-\frac{\pi}{4}, -1)$

A.2.6.13. Vi har $f(x) = \frac{1}{x}$. Beräkna tillräckligt många derivator av f för att se vad den generella formeln för $f^{(n)}(x)$ är. verifiera formeln med hjälp av matematisk induktion.

$f^{(0)}(x) = \frac{1}{x}$ $\quad (-1)^0 = 1$

$f^{(1)}(x) = -\frac{1}{1 \cdot x^2}$ $\quad (-1)^1 = -1$

$f^{(2)}(x) = \frac{2}{x^3}$ $\quad (-1)^2 = 1$

$f^{(3)}(x) = -\frac{2 \cdot 3}{x^4}$ $\quad (-1)^3 = -1$

$f^{(4)}(x) = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{x^5}$ $\quad (-1)^4 = 1$

$\vdots$

Känner igen $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$, $0! = 1$

Växlar minustecken varannan gång $\Rightarrow (-1)^n$

"Gissar"

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot \frac{n!}{x^{n+1}}$$

Bevis med induktion

1. visa att formeln gäller för basfallet (det första) $n = 1$ $\quad$ ($n=0$ går också)
2. Antag att formeln gäller för godtyckligt $p \in \mathbb{N}$ och visa att under den förutsättningen gäller det även för $p+1$.
3. Då gäller formeln för alla $n \in \mathbb{N}$. (beskriv varför)

Vill visa att $f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$

1. stämmer $f^{(1)}(x)$? $f^{(1)}(x) = (-1)^1 \cdot \frac{1!}{x^{1+1}} = (-1) \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{-1}{x^2}$ ok!

2. Antag att $f^{(p)}(x) = (-1)^p \frac{p!}{x^{p+1}}$ och visa mha det att $f^{(p+1)} = (-1)^{p+1} \frac{(p+1)!}{x^{p+2}}$

$$f^{(p+1)}(x) = \frac{d}{dx} f^{(p)}(x) = \frac{d}{dx} \underbrace{(-1)^p \, p!}_{\text{konstant}} \frac{1}{x^{p+1}} = (-1)^p p! \frac{d}{dx} \underbrace{\frac{1}{x^{p+1}}}_{= x^{-(p+1)}}$$

$$= (-1)^p p! \cdot -(p+1) \cdot \frac{1}{x^{p+2}} = (-1)^{p+1} (p+1)! \cdot \frac{1}{x^{p+2}} \quad \text{ok!}$$

3. Induktionsaxiomet ger att formeln gäller för alla $n \in \mathbb{N}$, och därmed är $f^{(n)} = (-1)^n n! \cdot \frac{1}{x^{n+1}}$ VSV.

A.2.9.11. Hitta en ekvation för tangenten till kurvan

$$\frac{x}{y} + \left(\frac{y}{x}\right)^3 = 2 \quad \text{i punkten } (-1,-1).$$

Om kurvan på formen $y = f(x)$ är tangentens lutning y' lika med $f'(x)$. Ofta har man inte kurvan på den formen, utan det kan till exempel se ut som i detta fallet. Då kan man använda implicit derivering, så att man deriverar båda sidorna map x och löser ut tangenten y'.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{y} + \left(\frac{y}{x}\right)^3\right) = \frac{d}{dx} 2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{1 \cdot y - xy'}{y^2} + 3\left(\frac{y}{x}\right)^2 \cdot \frac{y'x - y \cdot 1}{x^2} = 0 \quad \{\text{sätt in } (x,y) = (-1,-1)\}$$

$$\frac{1 \cdot (-1) - (-1) \cdot y'}{(-1)^2} + 3 \cdot \left(\frac{-1}{-1}\right)^2 \cdot \frac{y' (-1) - (-1) \cdot 1}{(-1)^2} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$-1 + y' + 3(-y' + 1) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$-2y' + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y' = 1$$

Tangenten: $y = 1 \cdot x + m$ går igenom $(-1, -1)$ $\Rightarrow$

$-1 = 1 \cdot (-1) + m \Rightarrow m = 0 \Rightarrow y = x$