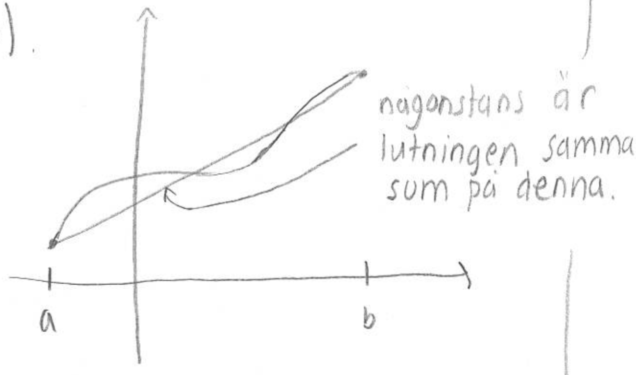
Ö13 MEDELVÄRDESSATSEN, INVERSA FUNKTIONER

Medelvärdessatsen

Antag att f är kontinuerlig på $[a,b]$ och deriverbar på (a,b).
Då gäller att

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c), \quad \text{för något } c \in (a,b).$$



Alternativ notation:

$$f(b) = f(a) + f'(c)(b-a), \quad \text{för något } c \in (a,b)$$

Växande och avtagande funktioner

En funktion f är (strängt) växande ① / avtagande ② på ett intervall I om

① $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1) \quad (f(x_2) > f(x_1)), \quad x_1, x_2 \in I$

② $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1) \quad (f(x_2) < f(x_1)), \quad x_1, x_2 \in I.$

om f är deriverbar på I ger medelvärdessatsen att f är (strängt) växande ① / avtagande ② på I om

① $f'(x) \geq 0 \quad (f'(x) > 0), \quad \forall x \in I$ $\quad \left(x_2 > x_1 \text{ och } \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) \right)$

② $f'(x) \leq 0 \quad (f'(x) < 0), \quad \forall x \in I.$

A.2.8.7. Visa att $(1+x)^r < 1 + rx$ om $x > 0$ eller $-1 \leq x < 0$, $0 < r < 1$.

Medelvärdessatsen! Låt $f(x) = (1+x)^r$, f är deriverbar med $f'(x) = r(x+1)^{r-1}$.

$\boxed{x > 0:}$ Använd medelvärdessatsen på $[0,x]$. $(a=0,\ b=x)$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{(1+x)^r - 1}{x} = f'(c) = r(1+c)^{r-1}, \quad \text{för något } c \in (0,x)$$

$$\Leftrightarrow (1+x)^r = rx(1+c)^{r-1} + 1 < \{\text{vi vill}\} < rx + 1$$

Detta gäller om $(1+c)^{r-1} < 1$

Eftersom $1+c > 1$ och $-1 < r-1 < 0$ gäller att $(1+c)^{r-1} = \frac{1}{(1+c)^{1-r}} < 1$.

Alltså är $(1+x)^r < 1+rx$, $x > 0$.

$\boxed{-1 \le x < 0}$ Använd medelvärdessatsen på $[x,0]$ $(a = x, b = 0)$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(0)-f(x)}{0-x} = \frac{1-(1+x)^r}{-x} = \frac{(1+x)^r - 1}{x} = f'(c) = r(1+c)^{r-1}, \quad c \in (x,0)$$

$$\Leftrightarrow \quad (1+x)^r = 1 + rx(1+c)^{r-1} < \{\text{vi vill}\} < 1 + rx.$$

Detta gäller om $(1+c)^{r-1} > 1$, eftersom $rx < 0$.

Eftersom $c \in (-1, 0)$ gäller $0 < 1+c < 1$. Dessutom är $-1 < r-1 < 0$

och det gäller att $(1+c)^{r-1} = \frac{1}{\underbrace{(1+c)^{1-r}}_{<1}} > 1$.

Alltså är $(1+x)^r < 1+rx$, $-1 \le x < 0$.

A.2.8.13. Låt $f(x) = x^3 - 4x + 1$. Hitta de intervall där f är strängt växande respektive strängt avtagande.

f är deriverbar $\Rightarrow$ vi kan kolla på derivatan.

$$f'(x) = 3x^2 - 4 = 3\left(x^2 - \frac{4}{3}\right) = 3\left(x - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(x + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

x		$-2/\sqrt{3}$		$2/\sqrt{3}$	
f'	$+$	0	$-$	0	$+$

strängt avtagande på $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

strängt växande på $\left(-\infty, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \infty\right)$

Injektivitet

En funktion f är injektiv om $x_1, x_2 \in D_f$ och

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 .$$

Surjektivitet

En funktion $f: X \to Y$ är surjektiv om

$$\forall y \in Y \quad \exists\, x \in X : \ f(x) = y$$

Invers funktion

Om funktionen $f: X \to Y$ är injektiv och surjektiv (dvs bijektiv) har den en invers $f^{-1}: Y \to X$ sådan att

$$f^{-1}(y) = x \quad \text{om} \quad y = f(x).$$

A.3.1.9. Visa att $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ är injektiv och beräkna dess invers f^{-1}.

Ange definitionsmängd och värdemängd till f och f^{-1}.

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $V_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{1}{x_1+1} = \frac{1}{x_2+1} \Leftrightarrow x_2 + 1 = x_1 + 1$$

$$\Leftrightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f \text{ är injektiv.}$$

Låt $y = f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ och lös ut x.

$$y = \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow x + 1 = \frac{1}{y} \Leftrightarrow x = \frac{1}{y} - 1$$

$$\Rightarrow \boxed{f^{-1}(x) = \frac{1}{x} - 1}$$

$D_{f^{-1}} = V_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $V_{f^{-1}} = D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

A.3.1.15. $f(x)$ är injektiv med invers f^{-1}. Beräkna inversen till $k(x) = -3f(x)$ i termer av f^{-1}.

Låt $y = k(x) = -3f(x) \Rightarrow f(x) = -\frac{y}{3} \Rightarrow x = f^{-1}(-\frac{y}{3})$

$\Rightarrow k^{-1}(y) = f^{-1}(\frac{-y}{3}) \Leftrightarrow k^{-1}(x) = f^{-1}(\frac{x}{3})$. Eftersom x och y bara är variabler som talar om att vi ska sätta in ett värde där spelar det ingen roll om vi använder x eller y eller någon annan bokstav, men man brukar använda x.