

Ö17. KONVERGENSTESTER FÖR SERIER

En serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerar om $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = s$, där $|s| < \infty$

och divergerar om $s = \pm \infty$.

Serien konvergerar absolut om $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergerar.

Om serien är konvergent måste $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ (det kan man kolla först)

○ konvergenstester: termtest, jämförelsetest, kvottest, rottest, ...

○ En alternerande serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ som uppfyller

(1) $a_n a_{n+1} < 0$, $n \geq N$ (varannan term olika tecken)

(2) $|a_{n+1}| \leq |a_n|$, $n \geq N$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

är konvergent och uppfyller $|s - S_n| \leq |a_{n+1}|$.

○ A.9.3.12. Avgör om $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1+n\sqrt{n}}$ konvergerar eller divergerar.

$$a_n = \frac{n^2}{1+n\sqrt{n}}$$

Termtest, går a_n mot noll?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{1+n\sqrt{n}} = \left\{ \text{dela med största potensen i nämnaren} \right\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\underbrace{\frac{1}{n\sqrt{n}}}_{\rightarrow 0} + 1} = \infty \Rightarrow \text{serien kan inte konvergera}$$

$\Rightarrow$ serien är divergent.

A.9.4.15. Hitta det minsta n så att $|s - s_n| < 0.001$, där s är summan av serien $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{2^n}$.

$$\text{Låt } a_n = (-1)^{n-1} \frac{n}{2^n}.$$

Vi vill använda oss av satsen ovan som säger att $|s - s_n| \leq |a_{n+1}|$.
Är alla villkor för den uppfyllda?

(1) $a_n a_{n+1} < 0$, eftersom $\frac{n}{2^n} > 0$ och $(-1)^{n-1}$ alternerande ok

(2) $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+1)/2^{n+1}}{n/2^n} = \frac{2^n(n+1)}{2^{n+1} \cdot n} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq 1$ ok

$$\Rightarrow |a_{n+1}| \leq |a_n|, n \geq 1.$$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{2^n} = 0$ ok

$\Rightarrow$ vi kan använda satsen

$$|s - s_n| \leq |a_{n+1}| = |(-1)^n \frac{(n+1)}{2^{n+1}}| = \frac{n+1}{2^{n+1}} < 0.001 = \frac{1}{1000}$$

Eftersom $n+1 > 1$ ser vi att $2^{n+1} > 1000$ måste gälla.

Eftersom $2^{10} = 1024$ ser vi att vi måste ha $n+1 \geq 10$

Vi testar $n=9$: $\frac{9+1}{2^{9+1}} = \frac{10}{1024} = \frac{1}{102.4} > \frac{1}{1000} \Rightarrow$ ej ok

så $n > 9$. Eftersom täljaren $n+1 > 10$ måste nämnaren vara större än 10000.

$$2^{10} = 1024 \text{ så } 2^x > 10000 \Rightarrow x = 14 \quad \left(\begin{array}{l} 1024 \cdot 2^3 < 10000 \text{ och} \\ 1024 \cdot 2^4 > 10000 \end{array} \right)$$

$$\text{vi får med } n=13 \quad \frac{n+1}{2^{n+1}} = \frac{14}{2^{14}} = \frac{14}{16384} < \frac{16.384}{16384} = \frac{1}{1000}$$

Så svaret är $n=13$.