Ö7. MER LIPSCHITZ OCH GRÄNSVÄRDEN

$f(x)$ Lipschitz på intervallet I med Lipschitzkonstant L om

$$|f(x_1)-f(x_2)| \leq L|x_1-x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in I$$

BM 2.6 Bestäm Lipschitzkonstanten för $h(x)=\dfrac{x^2}{1+x}$ på $I=[0,1]$.

Tag $x_1, x_2 \in I$.

$$|h(x_1)-h(x_2)| = \left|\frac{x_1^2}{1+x_1} - \frac{x_2^2}{1+x_2}\right| = \left|\frac{x_1^2(1+x_2) - x_2^2(1+x_1)}{(1+x_1)(1+x_2)}\right|$$

$$= \left|\frac{x_1^2 - x_2^2 + x_1^2x_2 - x_2^2x_1}{(1+x_1)(1+x_2)}\right| = \left|\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2) + x_1x_2(x_1-x_2)}{(1+x_1)(1+x_2)}\right|$$

$$= \left|\frac{(x_1+x_2+x_1x_2)(x_1-x_2)}{(1+x_1)(1+x_2)}\right| = \frac{x_1+x_2+x_1x_2}{(1+x_1)(1+x_2)}|x_1-x_2| .$$

$\leq$ { Grov uppskattning, täljaren så stor som möjligt, nämnaren så liten som möjligt }

$$\leq \frac{1+1+1\cdot 1}{(1+0)(1+0)}|x_1-x_2| = 3|x_1-x_2| \Rightarrow L=3$$

($L=1$ ganska lätt, bästa $L=\frac{3}{4}$, ses genom derivataformeln)

1.5.15. Use the formal definition of limit to verify that

$$\lim_{x \to 1/2} \frac{1-4x^2}{1-2x} = 2$$

Formell definition:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \text{om} \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \text{sådant att}$$

$$|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon. \quad (*)$$

Vi tar ett $\varepsilon > 0$ (det kan vara hur litet som helst) och måste hitta ett $\delta > 0$ så att $(*)$ gäller.

Vi har $L = 2$, $a = \frac{1}{2}$, $f(x) = \frac{1-4x^2}{1-2x}$

$$|f(x)-L| = \left| \frac{1-4x^2}{1-2x} - 2 \right| = \left| \frac{\cancel{(1-2x)}(1+2x)}{\cancel{1-2x}} - 2 \right| = |2x-1|$$

$$= 2\left|x - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon \quad \text{om} \quad \left|x-\frac{1}{2}\right| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \text{välj } \delta = \frac{\varepsilon}{2}$$