Ö.11 DERIVATOR, DERIVERINGSREGLER

Låt $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. om

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existerar kallas $f'(x)$ derivatan av f i punkten x och vi säger att f är deriverbar i x

Några viktiga deriveringsregler

Antag f, g deriverbara funktioner, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1. $D(\alpha f + \beta g) = \alpha f' + \beta g'$
2. $D(fg) = f'g + fg'$
3. $D(f/g) = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$, $g(x) \neq 0$
4. $D(f(g(x))) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

A.2.2.17 $F(t) = \sqrt{2t+1}$

a) Beräkna derivatan av $F(t)$ direkt från definitionen av derivata

b) Uttryck resultatet i a) på differentialform

Lösn

a) $$F'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{2(t+h)+1} - \sqrt{2t+1}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{2t+2h+1} - \sqrt{2t+1}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{2t+2h+1} - \sqrt{2t+1})(\sqrt{2t+2h+1} + \sqrt{2t+1})}{h(\sqrt{2t+2h+1} + \sqrt{2t+1})}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{2t} + 2h + \cancel{1} - (\cancel{2t} + \cancel{1})}{h(\sqrt{2t+2h+1} + \sqrt{2t+1})} = \lim_{h \to 0} \frac{2\cancel{h}}{\cancel{h}(\underbrace{\sqrt{2t+2h+1} + \sqrt{2t+1}}_{\to \sqrt{2t+1} + \sqrt{2t+1}})} = \frac{2}{2\sqrt{2t+1}}$$

b) Vi har från a) $F'(t) = \frac{dF}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2t+1}}$

Detta skrivs på differentialform genom att "multiplicera med dt"

$\Rightarrow \quad dF = \frac{dt}{\sqrt{2t+1}}$

A.2.3.10. Beräkna derivatan av $F(x) = (\underbrace{3x-2}_{f})(\underbrace{1-5x}_{g})$.

Produktregeln

$$F' = (fg)' = f'g + fg' = 3(1-5x) + (-5)(3x-2)$$
$$= 3-15x-15x+10 = 13-30x$$

A.2.4.24. (Uttryck derivatan av $[f(\frac{2}{x})]^3$ i termer av derivatan f' av den deriverbara funktionen f.)

f är en deriverbar funktion med derivata f'. Uttryck derivatan av $[f(\frac{2}{x})]^3$ i termer av f'.

Sammansatt funktion $F = h(f(g(x)))$

Börja innerst $f(\frac{2}{x}) = f(g(x)) \Rightarrow g(x) = \frac{2}{x}$

sedan har vi en funktion av detta också! kalla den h.

Vad är h i $h(f(g(x)))$? $h(x) = x^3$.

$$F = h(f(g(x))) \Rightarrow F' = h'(f(g(x))) \cdot (f(g(x)))' = \{\text{inre derivata igen}\}$$
$$= h'(f(g(x))) \cdot f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$= \left\{ h'(x) = 3x^2,\ g'(x) = \left(\frac{2}{x}\right)' = -\frac{2}{x^2} \right\}$$

$$= 3 \cdot (f(g(x)))^2 \cdot f'\left(\frac{2}{x}\right) \cdot \left(-\frac{2}{x^2}\right) = 3 \cdot \left[f\left(\frac{2}{x}\right)\right]^2 \cdot f'\left(\frac{2}{x}\right) \cdot \left(-\frac{2}{x^2}\right) = -\frac{6}{x^2}\left[f\left(\frac{2}{x}\right)\right]^2 \cdot f'\left(\frac{2}{x}\right)$$