

* Idag: Matematisk analys,

F04 gränsvärden

Adams/Essex (1.1), 1.2, 1.3, 1.5

* Matematisk analys är studiet
av gränsvärden, derivator
och integraler.

- Uppfanns av Leibniz och Newton
på 1600-talet

- Ett verktyg för att beskriva
värde och förändring

* Exempel: Gravitation

Acceleration

↑ $y(t)$

position: $y(t)$

hastighet: $v(t) = y'(t)$

$$= \frac{dy}{dt} \approx \frac{\Delta y}{\Delta t}$$



Vad menas med $\frac{d}{dt}$? (derivatan)

Om vi känner hastigheten v
kan vi beräkna positionen $y(t)$
genom att integrera:

$$v \approx \Delta y / \Delta t$$

$$\Rightarrow \Delta y \approx v \cdot \Delta t$$

$$y(t) \approx y(0) + \Delta y_1 + \Delta y_2 + \dots$$

$$= y(0) + \sum_i \Delta y_i$$

$$\approx y(0) + \sum_i v_i \Delta t_i$$

$$\approx y(0) + \int_0^t v(t) dt$$

Vad menas med $\int dt$?

Matematisk analys svarar på dessa
frågor och ger verktyg för att
beräkna $y(t)$.

$$v(t) = v(0) + \int_0^t v(s) ds$$

Newtons andra lag: $\boxed{F = ma}$

$$\ddot{v} = a = F/m = \frac{-mg}{m} = -g$$

$$\Rightarrow v(t) = \underbrace{v(0)}_{=0} + \int_0^t -g ds$$

$$= -[gs]_0^t = -gt$$

$$\Rightarrow y(t) = y(0) + \underbrace{\int_0^t}_{=h} \underbrace{\dot{y}(s) ds}_{=v(s)}$$

$$= h + \int_0^t -gs ds$$

$$= h - \left[gs^2/2 \right]_0^t$$

$$= \underline{\underline{h - gt^2/2}}$$

* Definition: gränsvärde

Funktionen f har gränsvärdet $\bar{f}$ i punkten $\bar{x}$ om

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < |x - \bar{x}| < \delta \Rightarrow |f(x) - \bar{f}| < \varepsilon$$

Vi skriver $(x \in B_\delta(\bar{x})) \quad (f(x) \in B_\varepsilon(\bar{f}))$

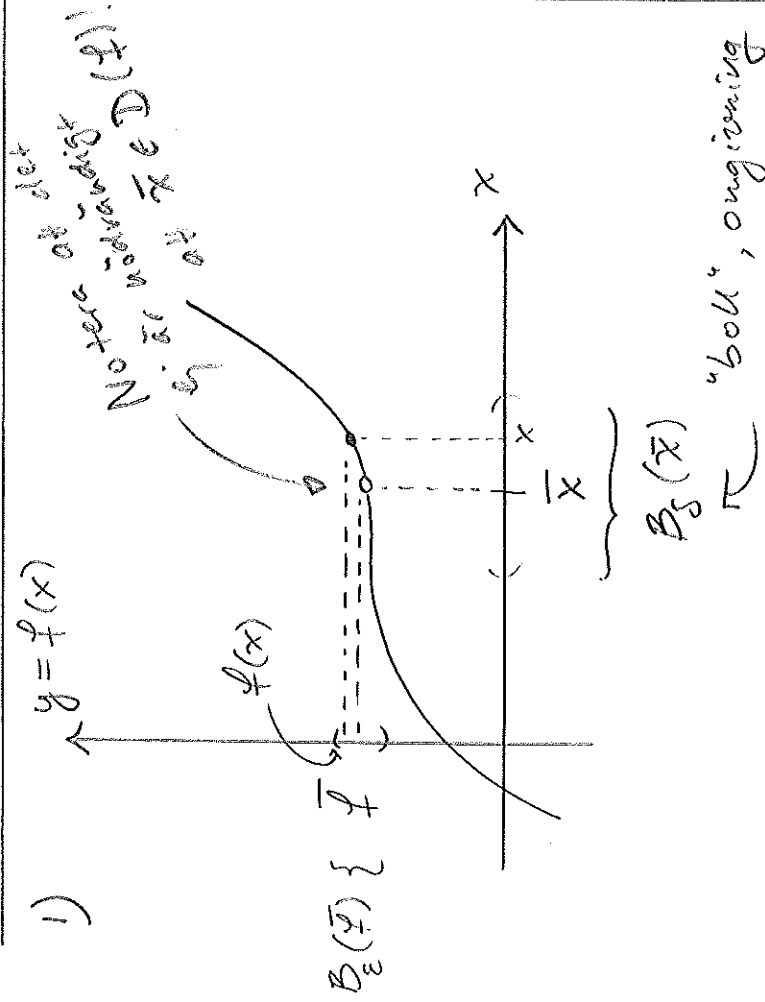
$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = \bar{f}$$

eller $f(x) \rightarrow \bar{f}$ då $x \rightarrow \bar{x}$.

Notera: - Adams/Essex ger en mer informell definition i kapitel 1.2!

(Ägna en god stund åt att diskutera definitionen!)

(Vi kommer nu att ge ett antal olika beaktningar/illustrationer av gränsvärde - men kom ihåg att det är definitionen som är den formella definitionen!)

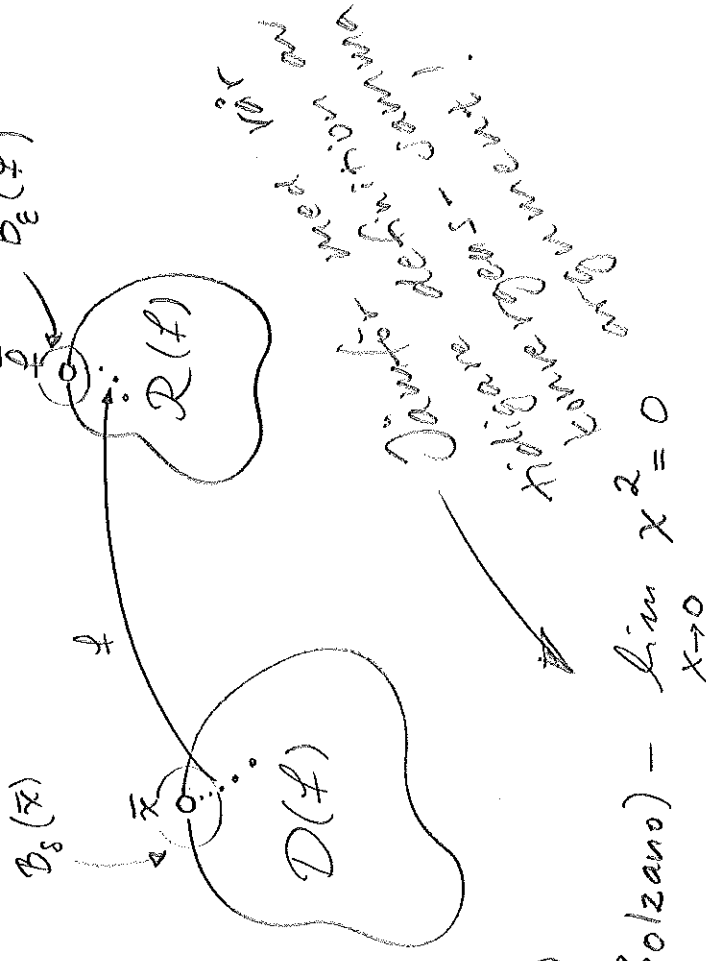


Definitionen säger att vi kan komma hur nära $\bar{f}$ vi vill, om vi bara går tillräckligt nära $\bar{x}$!

$\epsilon - \delta$ - definitionen av gränsvärde för funktioner

$\epsilon - N$ - definitionen av gränsvärde för talföljder

2)



3)

(Bolzano) - $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$

(Cauchy) - Det tror jag inte på!

(Bolzano) - Joho, för jag kan komma så nära jag vill!

(Cauchy) - Kan du komma närmare än 10^{-6} ?

(Bolzano) - Enkelt! Tag $-10^{-3} < x < 10^{-3}$!

(Cauchy) - Hm... Men tag $\epsilon = 10^{-100}$!!!

(Bolzano) - Laga problem! Tag $\delta = 10^{-50}$!

Tänk på $\epsilon - \delta$ -definitionen. Som ett argument!

Exempel: (Som en illustration på att det kan vara svårt att använda definitionen även för enkla gränsvärden)

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$$

$$\bar{x} = 2 \quad \bar{f} = 4$$

$$\left(\text{Vill att } |x^2 - 4| < \varepsilon \right)$$

$$\text{Låt } x = \bar{x} + \delta = 2 + \delta$$

$$\Rightarrow f(x) = (2 + \delta)^2$$

$$= 4 + \delta^2 + 4\delta$$

$$\Rightarrow |f(x) - \bar{f}| = |4 + \delta^2 + 4\delta - 4| = |\delta^2 + 4\delta| \leq \delta^2 + 4|\delta|$$

$$\text{Vill att } |f(x) - \bar{f}| < \varepsilon$$

$$\delta^2 + 4|\delta| < \varepsilon$$

$$\text{Tag } \delta = \min(\varepsilon/8, 1):$$

$$\frac{\varepsilon}{8} \cdot 1 + 4/8 \varepsilon < \varepsilon/8 + \varepsilon/2 = \varepsilon \cdot \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right) < \varepsilon$$

$$\text{Tag } \delta = \delta(\varepsilon) = \min(\varepsilon/8, 1)$$

$$\Rightarrow |x^2 - 4| < \varepsilon$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$$

Exempel:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 16}$$

Bestäm

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$$

$$\text{Notera: } -\bar{x} = 4 \notin D(f)$$

- Täljaren och så 0 i $\bar{x} = 4$ så

det finns en chans att gränsvärdet existerar!

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 16} = \frac{\sqrt{x} - 2}{(x+4)(x-4)} \\ &= \frac{\sqrt{x} - 2}{(x+4)(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{1}{(x+4)(\sqrt{x} + 2)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) \rightarrow \frac{1}{(4+4)(\sqrt{4+2})} = \frac{1}{8 \cdot 4} = \frac{1}{32}$$

då $x \rightarrow 4$.

Vi ser att vi kan komma hur nära $1/32$ vi vill och om Cauchy kommer och frågar kan vi bestämma $\delta = \delta(\epsilon)$!

* Sats: Räkne regler för gränsvärden

$$\text{Om } \lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = \bar{f} \quad \lim_{x \rightarrow \bar{x}} g(x) = \bar{g}$$

så gäller att

$$1. \lim_{x \rightarrow \bar{x}} [f(x) + g(x)] = \bar{f} + \bar{g}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \bar{x}} [f(x) - g(x)] = \bar{f} - \bar{g}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \bar{x}} [f(x)g(x)] = \bar{f}\bar{g}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \bar{x}} \alpha f(x) = \alpha \bar{f}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\bar{f}}{\bar{g}} \quad \text{om } \bar{g} \neq 0$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \bar{x}} [f(x)]^{m/n} = \bar{f}^{m/n}$$

($n > 0$; $\bar{f} > 0$ om n är jämnt; $\bar{f} \neq 0$ om $n < 0$)

$$7. \bar{f} \leq \bar{g} \quad \text{om } f(x) \leq g(x) \text{ på ett intervall som innehåller } \bar{x}.$$

Beris: (av 1)

(Cauchy säger ϵ - vad svarar vi då?)

$$\text{Vet att } |x - \bar{x}| < \delta_f(\epsilon) \Rightarrow |f(x) - \bar{f}| < \epsilon$$

$$|x - \bar{x}| < \delta_g(\epsilon) \Rightarrow |g(x) - \bar{g}| < \epsilon$$

$$|f(x) + g(x) - \bar{f} - \bar{g}| = |f(x) - \bar{f} + g(x) - \bar{g}|$$

$$\leq |f(x) - \bar{f}| + |g(x) - \bar{g}| < \epsilon/2 + \epsilon/2$$

$$\text{om } |x - \bar{x}| < \min(\delta_f(\varepsilon/2), \delta_g(\varepsilon/2)).$$

$$= \delta(\varepsilon)$$



* Definition: Ensidigt gränsvärde

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}^+} f(x) = \bar{f}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \bar{x} < x < \bar{x} + \delta \Rightarrow |f(x) - \bar{f}| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}^-} f(x) = \bar{f}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \bar{x} - \delta < x < \bar{x} \Rightarrow |f(x) - \bar{f}| < \varepsilon$$

* Definition: Gränsvärde i oändligheten

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \bar{f}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M > 0 : x > M \Rightarrow |f(x) - \bar{f}| < \varepsilon$$

(notsvarande för $x \rightarrow -\infty$)

* Definition: Oändligt gränsvärde

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = \infty$$

$$\forall M > 0 \exists \delta > 0 : 0 < |x - \bar{x}| < \delta \Rightarrow f(x) > M$$

(notsvarande för $f(x) \rightarrow -\infty$)