* **Idag:** Derivatan, deriveringsregler

$\boxed{F06}$

Adams/Essex (2.1)
2.2–2.4

* **Definition:** Derivata

Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara en funktion. Om gränsvärdet

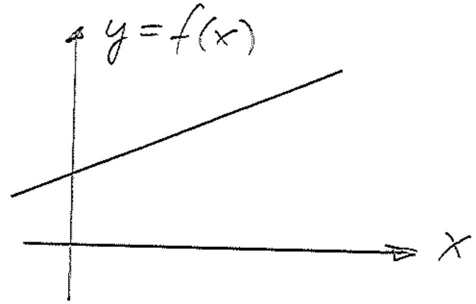
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existerar, så kallas $f'(x)$ derivatan av f i punkten x, och vi säger att f är deriverbar i punkten x.

Notera: Detta definierar en ny funktion $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i alla de punkter där f är deriverbar.

* **Exempel:**

$$f(x) = kx + m$$



$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

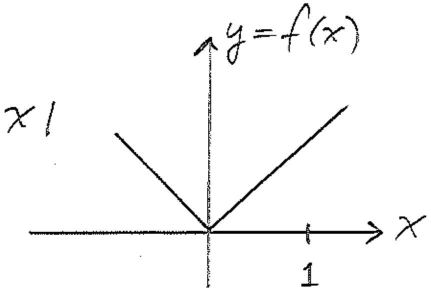
$$= \lim_{h \to 0} \frac{k \cdot (x+h) + \cancel{m} - (kx + \cancel{m})}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{kx} + k\cancel{h} - \cancel{kx}}{\cancel{h}} =$$

$$= \lim_{h \to 0} k = \underline{\underline{k}} \quad \text{ok!}$$

Exempel:

$f(x) = |x|$



(i) $f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{|1+h| - 1}{h}$

h litet

$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{1}+h-\cancel{1}}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} 1 = 1$

$\therefore f$ deriverbar i $x=1$ och $f'(1)=1$

(ii) Är f deriverbar i $x=0$?

$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$

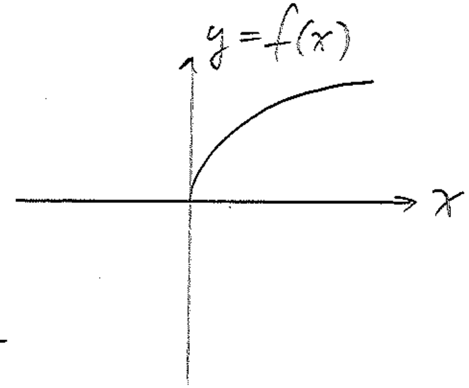
$= \lim_{h\to 0} \frac{|h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$

$\therefore$ Gränsvärdet existerar inte (olika om $h \to 0+$ eller $h \to 0-$)

$\therefore f$ <u>ej</u> deriverbar i $x=0$.

Exempel:

$f(x) = \sqrt{x}$



$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})\cdot(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h\cdot(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x}+h-\cancel{x}}{h\cdot(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$

$= \frac{1}{2\sqrt{x}}$

* Några välbekanta derivator

$f(x)$	$f'(x)$	
C	0	
x^2	$2x$	
$1/x$	$-1/x^2$	$(x \neq 0)$
$\sqrt{x}$	$1/2\sqrt{x}$	$(x > 0)$
x^r	$r \cdot x^{r-1}$	$(x^{r-1} \in \mathbb{R})$
$\lvert x \rvert$	$\operatorname{sgn} x$	$(x \neq 0)$

* Notation

tidsderivata

$$f' = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f = D_x f = f_x = \dot{f}$$

* Sats: Deriverbarhet $\Rightarrow$ Kontinuitet

Bevis:

$$\lim_{h \to 0} f(x+h) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot h + f(x) \right)$$
$$= f'(x) \cdot 0 + f(x) = f(x). \quad \blacksquare$$

* Deriveringsregler

Derivata av

(i) $\begin{cases} \text{summa} & f+g \\ \text{differens} & f-g \\ \text{produkt} & \alpha f \end{cases}$

(ii) produkt fg

(iii) kvot f/g

(iv) sammansättning $f \circ g$

* Sats: Derivatans "linearitet" (i)

$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g' \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

(i alla punkter där f och g är deriverbara)

Bevis:

$$(\alpha f + \beta g)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(\alpha f + \beta g)(x+h) - (\alpha f + \beta g)(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\alpha f(x+h) + \beta g(x+h) - (\alpha f(x) + \beta g(x))}{h}$$

$= \{$utnyttja linearitet för gränsvärden (F7)$\} =$

$$= \alpha \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \beta \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$= \alpha f'(x) + \beta g'(x)$$

$$\therefore \quad (\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x) \quad \forall x$$

$$\Rightarrow \quad (\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g' \qquad \blacksquare$$

Notera: Innehåller alla 3 reglerna (i)!

* Sats: Produktregeln (ii)

$$(fg)' = f'g + fg'$$

(i alla punkter där f och g är deriverbara)

Bevis:

$$(fg)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(fg)(x+h)-(fg)(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$= \{$lägg till och dra ifrån!$\} =$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x+h)$$

$$+ \lim_{h\to 0} f(x)\cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

Utnyttjar att f, g deriverbara $\Rightarrow$ kontinuerliga

$$= f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

$$\therefore \quad (fg)' = f'g + fg' \qquad \blacksquare$$

* Sats: Kvotregeln (iii)

$$(f/g)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

(i alla punkter där f och g är deriverbara och $g(x) \neq 0$)

Bevis:

$$(f/g)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(f/g)(x+h) - (f/g)(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)/g(x+h) - f(x)/g(x)}{h}$$

= {lägg till och dra ifrån!}

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)/g(x+h) - f(x)/g(x+h) + f(x)/g(x+h) - f(x)/g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \frac{1}{g(x+h)} + f(x) \cdot \frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h}$$

$$= f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x) - g(x+h)}{h} \cdot \frac{1}{g(x+h)\cdot g(x)}$$

$$= \frac{f'(x)\cdot g(x)}{(g(x))^2} - \frac{f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$\therefore \quad (f/g)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$\blacksquare$

* <u>Sats:</u> Kedjeregeln

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$$

(i alla punkter x där g är deriverbar och f deriverbar i $g(x)$)

<u>Bevis:</u>

Ge exempel
$f(x) = \sin x$
$g(x) = x^2$

Definiera

$$E(0) = 0$$

$$E(k) = \frac{f(u+k) - f(u)}{k} - f'(u)$$

Notera :

$$\lim_{k \to 0} E(k) = 0$$

Notera också att

$$f(u+k) - f(u) = k \cdot (f'(u) + E(k))$$

Tag nu $\begin{cases} k = g(x+h) - g(x) \\ u = g(x) \end{cases}$

$$\Rightarrow f(\underbrace{g(x)}_{u} + \underbrace{g(x+h) - g(x)}_{k}) - f(g(x))$$

$$= k \cdot (f'(g(x)) + E(k))$$

$$\therefore f(g(x+h)) - f(g(x)) = (f'(g(x)) + E(k)) \cdot (g(x+h) - g(x))$$

$$\Rightarrow (f \circ g)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (f'(g(x)) + E(k)) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= f'(g(x)) \cdot g'(x),$$

ty $E(k) \to 0$ då $h \to 0$. ▨

* Varför måste beviset vara så krångligt?

$$(f\circ g)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)}}_{\to f'(g(x))\ ?} \cdot \underbrace{\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{\to g'(x)}$$

Vad händer om $g(x+h) = g(x)$?

(Jmfr uppg. 2.4.46 i Adams/Essex.)