

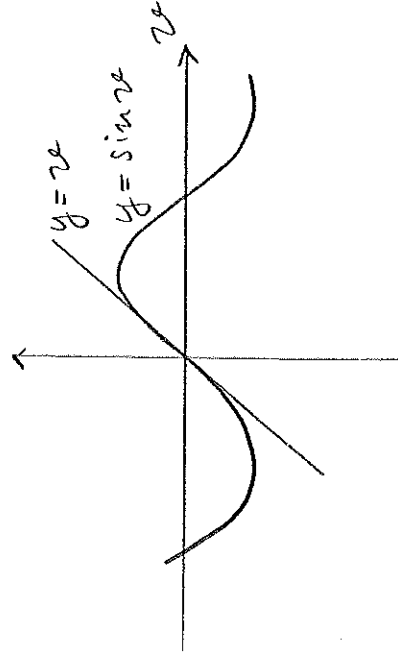
* Idag: Derivator av trig. funktioner,
högre derivator,
implicit derivering,
numerisk derivata
Adams/Essex 2.5, 2.6, 2.9

[F07]

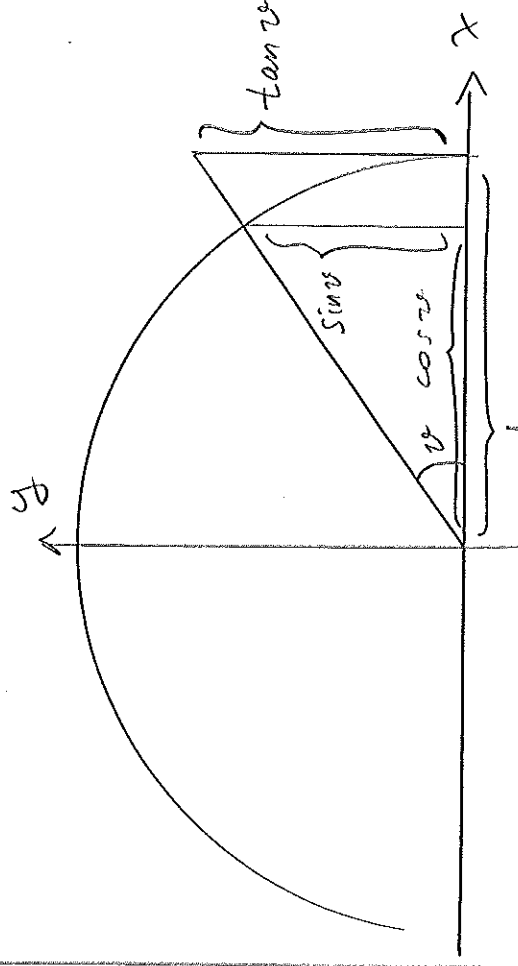
Vi skall beräkna derivatan av
 $\sin$, $\cos$, $\tan$, och kommer då att
behöva följande viktiga gränsvärde:

Sats:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



Beris:



Jämförelse av areor ger

$$\frac{\sin x \cdot \cos x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{1 \cdot \tan x}{2}$$

$$\sin x \cdot \cos x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\underbrace{\cos x}_{\leq 1} < \frac{\sin x}{x} < \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{\geq 1} \rightarrow 1$$

Instängningsregeln för gränsvärden ger $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

* Sats: $\sin' = \cos$

Beris:

$$f(x) = \sin x$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \cos h + \cos x \cdot \sin h - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}_{\rightarrow ?} \cdot \sin x + \cos x \cdot \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\rightarrow 1} \rightarrow 1$$

$$\frac{\cos h - 1}{h} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 h} - 1}{h} = \frac{(\sqrt{1 - \sin^2 h} - 1)(\sqrt{1 - \sin^2 h} + 1)}{h \cdot (\sqrt{1 - \sin^2 h} + 1)}$$

$$= \frac{1 - \sin^2 h - 1}{h \cdot (\sqrt{1 - \sin^2 h} + 1)} = -h \cdot \underbrace{\left(\frac{\sin h}{h}\right)^2}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 h} + 1}}_{\rightarrow 1/2} \rightarrow 0$$

$$\therefore f'(x) = 0 \cdot \sin x + \cos x = \cos x$$

* Sats: $\cos' = -\sin$

Beris:

$$\cos x = \sin(\pi/2 - x)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} \cos x = \cos(\pi/2 - x) \cdot (-1)$$

kedjeregeln

$$= \sin x \cdot (-1) = -\sin x$$

Slutligen kan vi nu beräkna derivatan av $\tan$.

* Sats: $\tan' = 1 / \cos^2$

Beris: Produktregeln ger

$$\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

* Övning: Visa att derivatan av

$$\arcsin x \text{ ges av } \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Lösning: Implicit derivering! (se nedan)

* Högre ordningens derivator

$$f \longrightarrow \boxed{D} \longrightarrow f' = f^{(1)} = Df$$

$$f' \longrightarrow \boxed{D} \longrightarrow f'' = f^{(2)} = D^2f$$

$$f'' \longrightarrow \boxed{D} \longrightarrow f''' = f^{(3)} = D^3f$$

$$f \longrightarrow \boxed{D^n} \longrightarrow f^{(n)} = D^n f$$

Notera:

- Om f är n gånger deriverbar så är $f^{(n-1)}$ kontinuerlig.
- Men $f^{(n)}$ behöver ej vara kontinuerlig. (Exempel: $|x|$)

* Funktionsrum

$$C([a, b]) = \{ \text{kontinuerliga funktioner på } [a, b] \}$$

$$C'([a, b]) = \{ \text{kontinuerligt deriverbara funktioner på } [a, b] \}$$

$$= \{ f : f' \in C([a, b]) \}$$

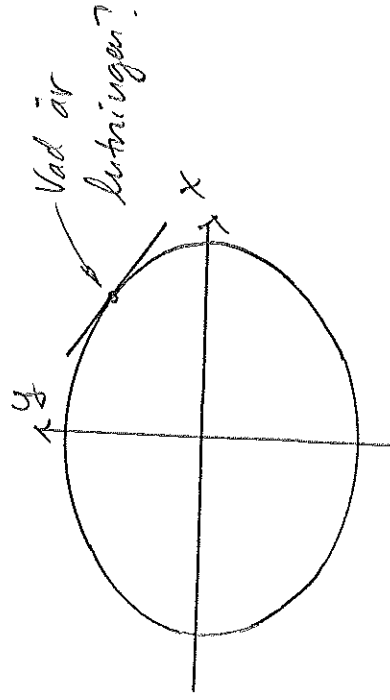
$$C^n([a, b]) = \{ f : f^{(n)} \in C([a, b]) \}$$

$$C^\infty([a, b]) = \{ f : f \in C^n([a, b]) \forall n \in \mathbb{N} \}$$

↑ "glatta" eller "släta" funktioner

Exempel: polynom, sin, cos

* Implicit derivering (exempel)



Ellips beskrivs av ekvationen

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

Metod 1: Lös ut $y = f(x)$

$$y^2/b^2 = 1 - (x/a)^2$$

$$y = \pm b \cdot \sqrt{1 - (x/a)^2}$$

$$\Rightarrow y' = b \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{1 - (x/a)^2}} \cdot \left(-2 \cdot \frac{x}{a}\right) \cdot \frac{1}{a}$$

$$= -\frac{b}{a} \cdot \frac{x/a}{\sqrt{1 - (x/a)^2}}$$

Metod 2: Implicit derivering

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

$$\frac{d}{dx} VL = \frac{d}{dx} HL$$

$$2 \cdot \frac{x}{a} \cdot \frac{1}{a} + 2 \cdot \frac{y}{b} \cdot y' \cdot \frac{1}{b} = 0$$

$$\frac{y}{b} \cdot y' \cdot \frac{1}{b} = -\frac{1}{a} \cdot \frac{x}{a}$$

$$y' = -\frac{b}{a} \cdot \frac{x/a}{\underbrace{y/b}} = \frac{x/a}{\sqrt{1 - (x/a)^2}}$$

* Numerisk derivata

Derivatans $f'(x)$ kan approximeras med differenskvoten

$$D_h f = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \approx f'(x)$$

- Hur litet skall h vara?
- Ju mindre desto bättre?

Vi kommer längre fram i kursen (fredag!) att visa att felet ges av

("discretization error")

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| \leq \frac{h}{2} \cdot |f''(x)| \rightarrow 0 \text{ då } h \rightarrow 0$$

Men: När differenskvoten beräknas numeriskt (i MATLAB) tillkommer också ett avrundningsfel (beräkningsfel):

Flyttalsavvalning

$$\left| f\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right) - \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right|$$

$$\approx \frac{2 \cdot E_{mach} \cdot |f'(x)|}{h} = E_c \quad (\text{"computational error"})$$

Det totala felet ges då av

$$|f\ell(D_h f) - f'|$$

$$= |f\ell(D_h f) - D_h f + D_h f - f'|$$

$$\leq |f\ell(D_h f) - D_h f| + |D_h f - f'| \leq$$

$$\leq E_c + E_D = \frac{2 E_{mach} \cdot |f'|}{h} + \frac{h}{2} |f''|$$

↑
ökar om h minskar om h minskar

$\Rightarrow$ Måste finnas ett optimalt h !

Finna minimum av

$$E(h) = \frac{2 \varepsilon_{\text{wach}} \cdot |f'|}{h} + \frac{h}{2} |f''|$$

$$E'(h) = -\frac{2 \varepsilon_{\text{wach}} |f'|}{h^2} + \frac{1}{2} |f''| = 0$$

$$\frac{1}{2} |f''| = \frac{2 \varepsilon_{\text{wach}} |f'|}{h^2}$$

$$h^2 = \frac{4 \varepsilon_{\text{wach}} |f'|}{|f''|}$$

$$h = 2 \cdot \sqrt{\frac{|f'|}{|f''|}} \cdot \sqrt{\varepsilon_{\text{wach}}}$$

$$\sim \sqrt{\varepsilon_{\text{wach}}} \sim \underline{\underline{10^{-8}}}$$