

* Idag: Medelvärdessatsen,
linearisering

F08

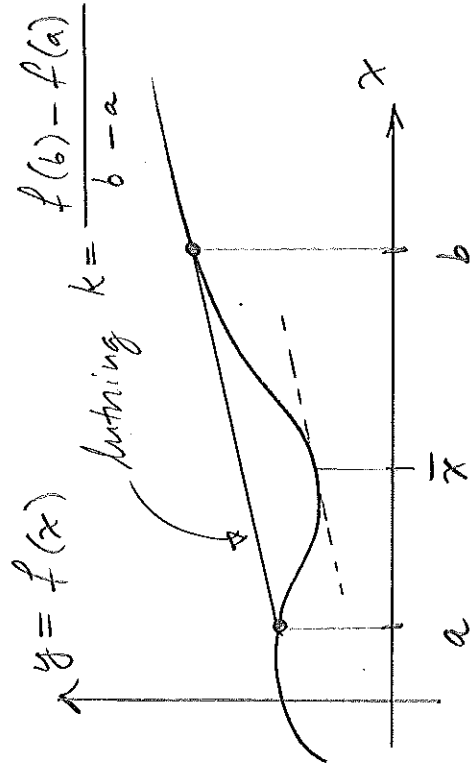
Adams / Essex 2.8

* Sats: Medelvärdessatsen

Om funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är
kontinuerlig på det slutna begränsade
intervallet $[a, b]$ och deriverbar
på det öppna intervallet (a, b)
så finns ett $\bar{x} \in (a, b)$ s.a.

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\bar{x}).$$

(Vi skall bevisa detta strax!)



(wärdet finns (minst) en
punkt $\bar{x} \in (a, b)$ med exakt
samma lutning som mellan
 $(a, f(a))$ och $(b, f(b))$)

Exempel: $f(x) = Ax^2 + Bx + C$

$$\begin{aligned} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} &= \frac{Ab^2 + Bb + C - (Aa^2 + Ba + C)}{b - a} \\ &= \frac{A(b^2 - a^2) + B(b - a)}{b - a} = A(b + a) + B \end{aligned}$$

$$f'(x) = 2Ax + B$$

Finn $\bar{x} \in (a, b)$ så att

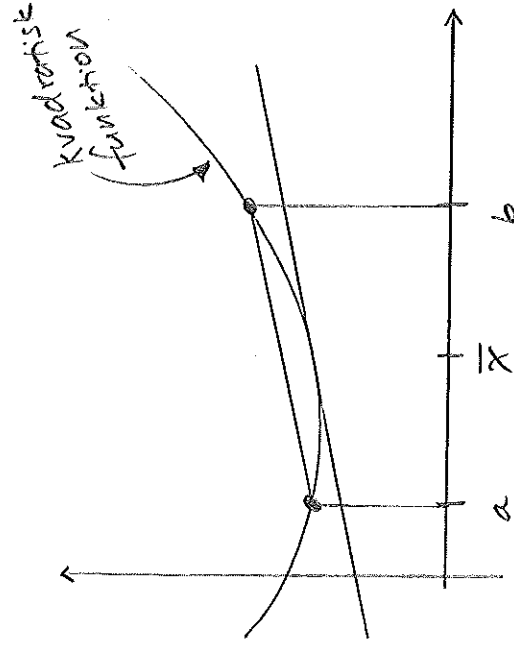
$$A \cdot (b+a) + B = 2A\bar{x} + B$$

(medelvärdesatsen säger att det finns)

$$A(b+a) = 2A\bar{x}$$

$$\bar{x} = \frac{a+b}{2}$$

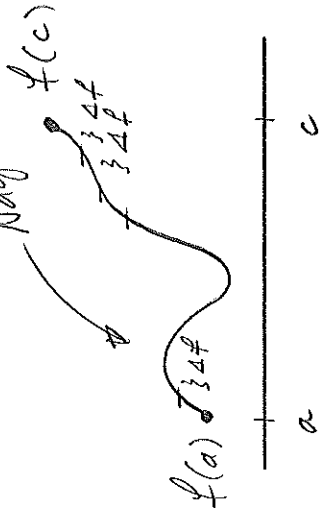
$\therefore$ Värdet antas i mittpunkten!



* Lemma: Om $f(a) < f(c)$ och f' "hjälpst" är Lipschitz-kontinuerlig på $[a, c]$ så måste $f'(\bar{a}) > 0$ i någon punkt $\bar{a} \in (a, c)$.

Beris:

Någonstans mellan a och b
måste
uppgå!



Alt 1: "Följer från figuren"

(inget tuffredställdande bevis)

Alt 2: I läsperiod II skall vi visa att

$$f(c) = f(a) + \int f'(x) dx$$

vilket följer av att a

$$f(c) = f(a) + \Delta f + \Delta f + \dots$$

$$\begin{aligned}
 &= f(a) + \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \Delta x + \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \Delta x + \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \Delta x + \dots \\
 &\approx f(a) + f' \cdot \Delta x + f' \cdot \Delta x + f' \cdot \Delta x + \dots \\
 &\approx f(a) + \int_a^x f'(x) dx
 \end{aligned}$$

Antag nu att $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a, b)$.

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow f(c) &= f(a) + \int_a^c \underbrace{f'(x)}_{\leq 0} dx \\
 &\leq f(a) + \int_a^c 0 dx = \\
 &= f(a) + 0 = f(a)
 \end{aligned}$$

$$\therefore f(c) \leq f(a)$$

Men: $f(c) > f(a)$

$$\Rightarrow \text{Inte sant att } f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a, c)$$

$$\Rightarrow \exists \bar{a} \in (a, c) : f'(\bar{a}) > 0.$$



Bevis: (av medelvärdessatsen)

Vi kommer (i tillägg) att anta att f' är Lipschitz-kontinuerlig.

Bevisidé:

(i) Beträkta follet $f(a) = f(b)$

(Rolles satz) och använd Bolzano

(ii) Utvidga till follet $f(a) \neq f(b)$

(i) Antag $f(a) = f(b)$

Skall visa att $\exists \bar{x} \in (a, b)$:

$$f'(\bar{x}) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \quad (*)$$

Two fall:

$$1) f(x) = f(a) = f(b) = \text{konstant}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b) \Rightarrow (*) \text{ uppfyllt}$$

$$(ii) \exists c \in (a, b) : f(c) \neq f(a) = f(b)$$

$$\text{Lemma} \Rightarrow \exists \bar{a} \in (a, c) : f'(\bar{a}) > 0$$

$$(\text{eller } f'(\bar{a}) < 0)$$

På samma sätt:

$$\exists \bar{b} \in (c, b) : f'(\bar{b}) < 0$$

(eller $f'(\bar{b}) > 0$)

$$\Rightarrow f'(\bar{a}) \cdot f'(\bar{b}) < 0$$

Bolzano's sats ger då att

(f_3 f' är Lipschitz-kontinuerlig)

$$\exists \bar{x} \in (\bar{a}, \bar{b}) \subset (a, b) : f'(\bar{x}) = 0.$$

$\therefore$ Medelvärdessatsen uppfylls då

$f(a) = f(b)$. Detta kallas Rolles Sats.

(ii) Om $f(a) \neq f(b)$ bildar vi funktionen

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$$

Notera:

$$g(a) = f(a) - 0 = f(a) \quad \swarrow \text{Samma!}$$

$$g(b) = f(b) - f(b) + f(a) = f(a)$$

Rolles sats ger

$$\exists \bar{x} \in (a, b) : g'(\bar{x}) = 0$$

Men:

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\therefore f'(\bar{x}) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = g'(\bar{x}) = 0$$

$$\Leftrightarrow f'(\bar{x}) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



* Linearisering

Medelvärdesatsen säger

$$f'(\bar{x}) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Tillämpa på nya variabler

$a = \bar{x}$ (fix punkt)

$b = x$ (variabel)

$\bar{x} = \xi(x)$ (punkt mellan x och $\bar{x}$)
 $\nwarrow \setminus x_i$

$$f'(\xi(x)) = \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}}$$

$$f'(\xi)(x - \bar{x}) = f(x) - f(\bar{x})$$

$$f(x) = f(\bar{x}) + f'(\xi) \cdot (x - \bar{x})$$

Alternativ och minst
 viktig formulering
 lika medelvärdesatsen
 an

Om $|x - \bar{x}|$ är liten kan vi anta att
 $f'(\xi) \approx f'(\bar{x})$ ekvation för en
 rät linje!

$$\Rightarrow f(x) \approx f(\bar{x}) + f'(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x})$$

Denna approximation kallas linearisering.

f approximeras med en linjär (egentligen
 "affin") funktion. Vi återvänder till
 detta senare i kursen!