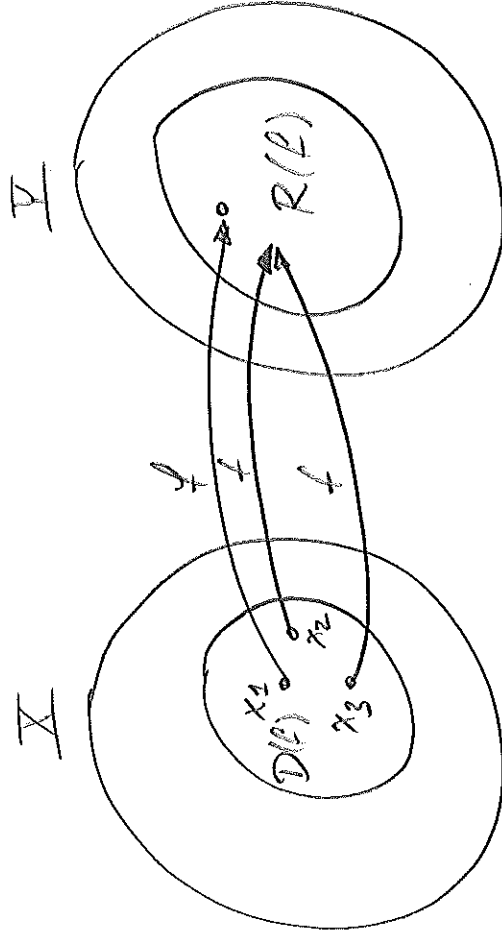


* Idag: Inversa funktioner
 $\exp x$, $\log x$, $\ln x$
 Exponentiell tillväxt

F09

Arcusfunktioner

* Inversa funktioner



$$f: X \rightarrow Y$$

Mer precist:

$$f: X \supseteq D(f) \rightarrow R(f) \subset Y$$

Viktiga egenskaper:

- Ser olika x -värden olika y -värden? (injektivitet)
- Kan vi komma till alla $y \in Y$? (surjektivitet)

- Kan vi definiera en invers funktion?

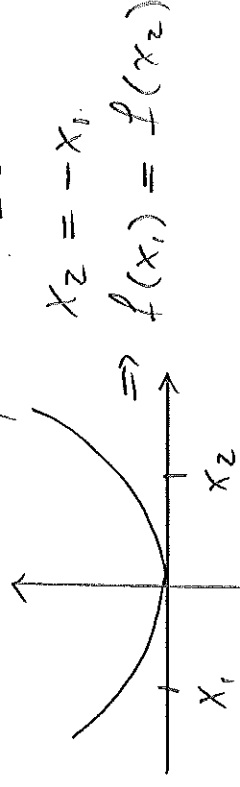
Definition: Injektivitet ("ett-till-ett")

Funktionen f är injektiv om

$$\forall x_1, x_2 \in D(f): x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Exempel: $f(x) = x^2$ injektiv på $X = [0, \infty)$

men inte på $X = \mathbb{R}$



Definition: Surjektivitet ("på", "onto")

Funktionen f är surjektiv om

$$\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$$

Exempel: $f(x) = x^2$ ej surjektiv

för $X = Y = \mathbb{R}$, t.ex.

$$\nexists x \in \mathbb{R} : f(x) = -1.$$

Definition: Bijektivitet

Funktionen f är bijektiv om den är både injektiv och surjektiv.

Definition: Invers funktion

Om $f: X \rightarrow Y$ är bijektiv kan vi definiera

$$f^{-1}: Y \rightarrow X$$

$$f^{-1}(y) = x \text{ som uppfyller } y = f(x).$$

Exempel: $f(x) = x^2$

$$X = Y = [0, \infty)$$

f är surjektiv, injektiv och därmed bijektiv. Inversen ges av

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x}.$$

* Exponentialfunktionen, logaritmen

Vi kan beräkna

$$f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$f(x) = x^r, \quad r \in \mathbb{Q}$$

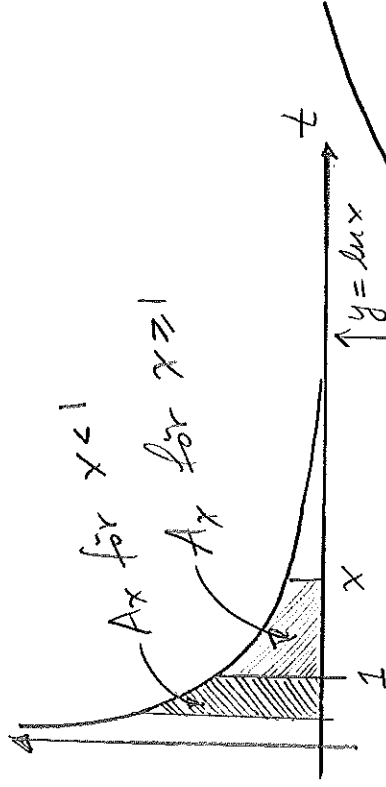
$$\text{t.ex. } x^r = x^{p/q} = (x^p)^{1/q}$$

Men hur definierar vi x^a , $a \in \mathbb{R}$?

Definition: Naturliga logaritmen $\ln x$

Låt A_x vara arean under kurvan

$y = 1/t$ enligt figur:



Vi definierar då

$$\ln x = \begin{cases} A_x, & x \geq 1 \\ -A_x, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

Med andra ord (lpII):

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

Notera:

$$\begin{aligned} \ln 1 &= 0 \\ \ln \infty &= \infty \\ \ln 0 &= -\infty \end{aligned}$$

" $\ln \infty = \infty$ " och " $\ln 0 = -\infty$ " är självklara

Härav följer direkt (enligt analysens fundamentalsats - visas i lp II) att

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{d}{dx} \int_1^x \frac{1}{t} dt = \frac{1}{x}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}}$$

Definition: Exponentialfunktionen $\exp(x)$

$\ln x$ är bijektiv för $I = (0, \infty)$, $Y = \mathbb{R}$.

Vi kan då definiera

$$\exp: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$$

Som inversen till $\ln$.

$$\therefore y = \ln x \Leftrightarrow x = \exp(y)$$

$$x = \ln y \Leftrightarrow y = \exp(x)$$

$$\ln(\exp x) = \exp(\ln x) = 1 \quad x > 0$$

* Sats: Egenskaper för $\ln$ och $\exp$

$$(i) \ln xy = \ln x + \ln y \quad (1) \quad \exp(x) \cdot \exp(y) = \exp(x+y) \quad (2)$$

$$(ii) \ln x/y = \ln x - \ln y \quad \exp(x)/\exp(y) = \exp(x-y)$$

Beris: (Av (i))

$$(1) \underbrace{\ln xy}_{VL(x)} = \underbrace{\ln x + \ln y}_{HL(x)}$$

Låt y vara en konstant och derivera m.o.p. x :

$$\frac{d}{dx} VL(x) = \frac{d}{dx} \ln xy = \frac{1}{xy} \cdot y = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx} HL(x) = \frac{d}{dx} (\ln x + \ln y) = \frac{1}{x} + 0 = \frac{1}{x}$$

Notera nu att $VL(1) = HL(1) = \ln y$ (t.ex. $\ln 1 = 0$)

$\therefore$ VL och HL har samma derivata och sammanfaller i en punkt.

$$\Rightarrow \underline{\underline{VL = HL.}}$$

$$(2) \quad \underbrace{\exp(x) \cdot \exp(y)}_{VL} = \underbrace{\exp(x+y)}_{HL} ?$$

$$\ln(VL) = \ln(\exp(x) \exp(y)) = \ln \exp y + \ln \exp x = x + y$$

$$\ln(HL) = \ln \exp(x+y) = x+y$$

$\therefore \ln VL = \ln HL$ $\forall x, y$ och $\ln$ bijektiv (speciellt injektiv)

$$\Rightarrow VL = HL. \quad \blacksquare$$

* Definition: Talet e

$$e = \exp(1) \approx 2.7182818. \quad \text{Notera: } \ln e = 1.$$

* Definition: a^x för $a, x \in \mathbb{R}$

För $a > 0$ definierar vi

$$a^x = \exp(x \ln a).$$

$$\Rightarrow e^x = \exp(x \ln e) = \exp(x \cdot 1)$$

$$\therefore \boxed{e^x = \exp(x)} \quad \blacksquare$$

Viktiga frågor:

- Är detta en rimlig definition?

- Sammanfaller den med vår vanliga definition då $x \in \mathbb{Q}$?

För att svara på detta måste vi visa följande sats:

Sats: $\ln x^y = y \ln x$

Beris: Måste visa att det gäller för båda definitionerna av x^y !

(i) $y \in \mathbb{Q}$

← Vi kan derivera när $y \in \mathbb{Q}$

$$VL = \ln x^y \quad HL = y \ln x$$

$$\frac{d}{dx} VL = \frac{d}{dx} \ln x^y = \frac{1}{x^y} \cdot y \cdot x^{y-1} = \frac{y}{x}$$

$$\frac{d}{dx} HL = y \cdot \frac{1}{x} = \frac{y}{x}$$

$$VL(1) = HL(1) = 0$$

$$\Rightarrow VL = HL$$

(ii) $y \in \mathbb{R}$ (ny definition)

$$VL = \ln x^y = \ln \exp(y \ln x) = y \ln x = HL$$

Vi kan nu visa att definitionerna sammanfaller:

$$x \in \mathbb{Q} : a^x = (a^p)^{1/q} = VL$$

$$x \in \mathbb{R} : a^x = \exp(x \ln a) = HL$$

$$\ln VL = \ln a^x = x \ln a$$

$$\ln HL = \ln \exp(x \ln a) = x \ln a$$

$$\therefore VL = HL \quad \text{Stämmer!}$$

Slutsats: Vi kan lugnt skriva $\exp(x) = e^x$.

* Sats: Derivatans av $\exp(x) = e^x$

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

Beris:

$$x = \ln e^x$$

$$\text{Derivera!} \Rightarrow 1 = \frac{1}{e^x} \cdot \frac{d}{dx} e^x$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx} e^x = e^x$$

* Alternativ definition av e^x :

Exponentialfunktionen $u(x) = e^x$ kan definieras som lösningen till differentialekvationen

$$\begin{cases} u'(x) = u(x) \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

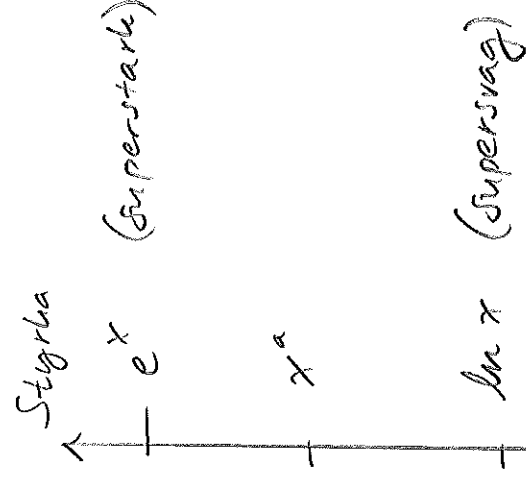
Vi återkommer till differentiationer i lp II!

* Sats: Viktiga gränsvärden

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^a}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^a \ln x = 0$$



* Självstudie:

- Modeller för exponentiell tillväxt / avtagande (A.3.4)
- Arcusfunktionerna (A.3.5)

$$\arcsin = \sin^{-1} \quad [-1, 1]$$

$$\arccos = \cos^{-1} \quad [-1, 1]$$

$$\arctan = \tan^{-1} \quad (-\infty, \infty)$$

Obs: Definitionsmängder och värdemängder