

* Idag: Relaterade hastigheter
l'Hôpital's regel (regler)
Extremvärden

F10

Adams / Essex A.4.1, A.4.3-5

* Relaterade hastigheter

- Samband mellan två tidsberoende funktioner
- Derivera m.a.p. t för att få fram ett samband mellan tidsderivatorna

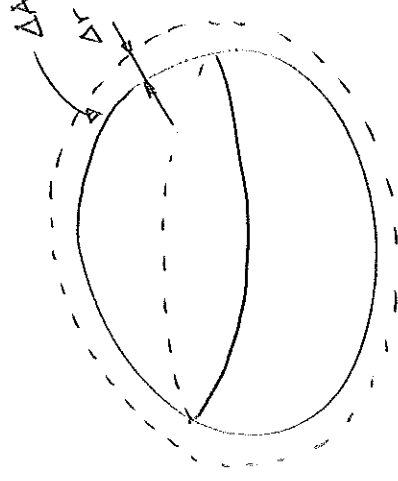
(Påminner om implicit derivering!)

Exempel: Relatera hastigheten för ökningen av volymen $\dot{V}(t)$ för en sfär med hastigheten för ökningen av radien $\dot{r}(t)$. (En ballong som blåses upp.)

$$\begin{aligned} V &= \frac{4\pi r^3}{3} \\ \Rightarrow \dot{V} &= \frac{d}{dt} V = \frac{d}{dt} \left(\frac{4\pi r^3}{3} \right) \\ &= \frac{4 \cdot 3 \cdot \pi r^2}{3} \cdot \dot{r} = \\ &= 4\pi r^2 \cdot \dot{r} \\ &= A \end{aligned}$$

$$\therefore \dot{V}(t) = A(t) \cdot \dot{r}(t)$$

$$\Delta V \approx A \cdot \Delta r \Rightarrow \frac{\Delta V}{\Delta t} \approx A \cdot \frac{\Delta r}{\Delta t}$$



* Obestämda former
(“indeterminate forms”)

Typ	Exempel
1. $0/0$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} (=1)$
2. ∞/∞	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1/x^2)}{\cot(x^2)} (=0)$
3. $0 \cdot \infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln \frac{1}{x} (=0)$
4. $\infty - \infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} (=0)$
5. 0^0	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x (=1)$
6. ∞^0	$\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} (\tan x)^{\cos x} (=1)$
7. 1^∞	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x (=e)$

Lösningssmetod: Skriv om på formen

$0/0$ eller ∞/∞ och

använd L'Hôpital's regler,
(möjligtvis i kombination
med logaritmer)

* Sats: L'Hôpital's regel I ($0/0$)

Om f och g är deriverbara på (a,b)
och

(i) $g'(x) \neq 0$ på (a,b)

(ii) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$

(iii) gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ existerar

så gäller att

$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$

Notera: Motsvarande gäller för

$$x \rightarrow b-$$

$$x \rightarrow \pm \infty$$

Exempel: Beräkna $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \exp \left(x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) \right)$$

$$= \exp \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$= \exp \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + 1/x)}{1/x}$$

$$= \exp \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1+y)}{y}$$

$$= \exp \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1/(1+y)}{1} = \exp(1) = e$$

* Sats: L'Hôpital's regel II (∞/∞)

Om f och g är deriverbara på (a,b) och

$$(i) \ g'(x) \neq 0 \text{ på } (a,b)$$

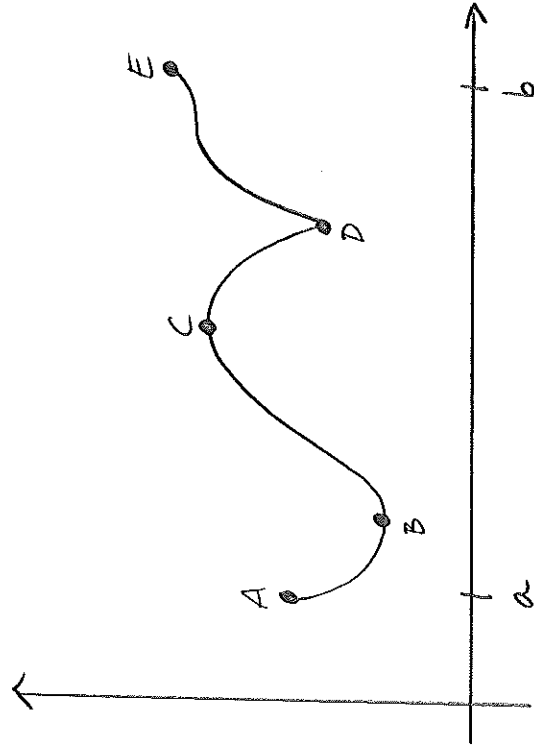
$$(ii) \ \lim_{x \rightarrow a+} g(x) = \pm \infty$$

$$(iii) \text{ gränsvärdet } \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \text{ existerar}$$

så gäller att

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

* Extremvärden (maximum och minimum)



- A: lokalt maximum, ändpunkt
- B: lokalt minimum, globalt minimum, kritisk punkt
- C: lokalt maximum, kritisk punkt
- D: lokalt minimum, singular punkt
- E, lokalt maximum, globalt maximum, ändpunkt

* Definition: globalt maximum/minimum

$\bar{x}$ är ett globalt maximum för funktionen f på intervallet I om

$$f(\bar{x}) \geq f(x) \quad \forall x \in I.$$

$\bar{x}$ är ett globalt minimum för funktionen f på intervallet I om

$$f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in I.$$

* Definition: lokalt maximum/minimum
(ext)

$\bar{x}$ är ett lokalt maximum för funktionen f om

$$\exists h > 0 : f(\bar{x}) \geq f(x) \quad \forall x \in (\bar{x}-h, \bar{x}+h)$$

$\bar{x}$ är ett lokalt minimum för funktionen f om

$$\exists h > 0 : f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in (\bar{x}-h, \bar{x}+h)$$

hitta globala extrempunkter:

Undersök alla lokala extrempunkter!

hitta lokala extrempunkter:

Undersök alla

- kritiska punkter ($f' = 0$)
- singulara punkter (f' ej definierad)
- ändpunkter

Maximum eller minimum:

Undersök

- teckenväxling för f'

$\begin{matrix} \text{min} & \text{max} \\ \text{---} \text{ } \text{---} \end{matrix}$

eller

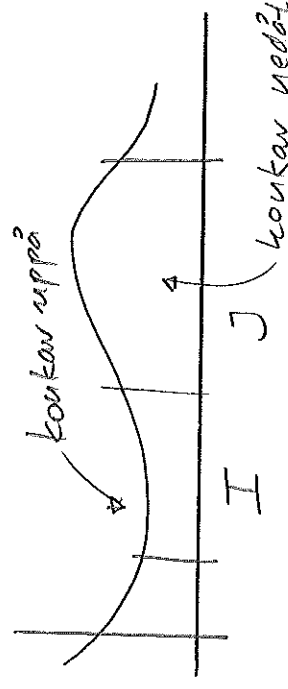
- andraderivatastecken

$\begin{matrix} \text{min} & \text{max} \\ \text{---} \text{ } \text{---} \end{matrix}$

* Konkav, konvex, inflexionspunkt

Definition: Konkav uppåt/nedåt

Funktionen f är konkav uppåt på intervallet I om f' är växande på I



Funktionen f är konkav nedåt på intervallet J om f' är avtagande på J .

Definition: Konkav, konvex

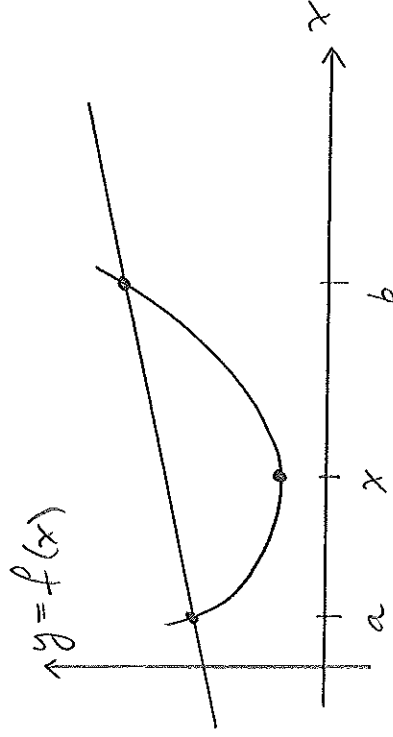
konkav = konkav nedåt (konkav mot x-axeln)

konvex = konkav uppåt (konvex mot x-axeln)

(konkav = buktar inåt; konvex = buktar utåt)

* Örning: Visa att om en funktion är konvex så gäller att

$$f((1-s)a + sb) \leq (1-s)f(a) + sf(b) \quad \forall s \in [0,1]$$



$$x = sa + (1-s)b$$

Ledning: 1) Tillämpa medelvärdesatsen på (a, c) och (c, b) !

$$\begin{aligned} 2) f(x) &= f(a) + \int_a^x f'(t) dt \\ &= f(b) - \int_x^b f'(t) dt \end{aligned}$$

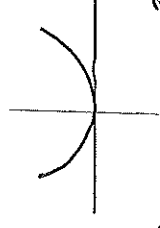
* Definition: inflexionspunkt

Funktionen f har en inflexionspunkt i punkten $\bar{x}$ om f är deriverbar i $\bar{x}$ och f går från konkav till konvex (eller omvänt) i $\bar{x}$.

Exempel:

$$y = x^3$$

$$y' = 3x^2$$



y' avtagande på $(-\infty, 0) \Rightarrow y = x^3$ konkav

y' växande på $(0, \infty) \Rightarrow y = x^3$ konvex

$x = 0$ inflexionspunkt

