

* Idag: Lipschitz-kontinuitet

Denna vecka fokuserar vi lite extra på beräkning och programmering, och på att komma ikopp med övningar och programmeringsuppgifter!

[F12]

* Definition: Lipschitz-kontinuitet

Funktionen f är Lipschitz-kontinuerlig på intervallet I om

$$\exists L > 0 : |f(x_1) - f(x_2)| \leq L |x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in I$$

- Starkare krav än kontinuitet
- Kravtattiskt, mer kraftfullt
- Med andra ord:

$$|\Delta y| \leq L |\Delta x|$$

$$\left| \frac{\Delta y}{\Delta x} \right| \leq L \quad \left(\begin{array}{l} \sim \text{begränsad} \\ \text{derivata men} \\ \text{behöver ej vara} \\ \text{deriverbar: } f'(x) = L \end{array} \right)$$

* Sats: Lipschitz-kontinuitet $\Rightarrow$ kontinuitet

Bevis:

Antag att f är Lipschitz på I

$$\Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leq L |x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in I$$

Skall visa att

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = f(\bar{x})$$

drvs:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < |x - \bar{x}| < \delta \Rightarrow |f(x) - \underbrace{f(\bar{x})}_f| < \varepsilon$$

Eftersom f är Lipschitz gäller att

$$\therefore |f(x) - f(\bar{x})| \leq L \underbrace{|x - \bar{x}|}_{< \delta} < L \delta$$

$$\therefore |f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon \quad \text{om} \quad L \delta < \varepsilon$$

$$\therefore \text{Tag } \delta = \varepsilon / L$$

$\therefore f$ är kontinuerlig!



* Notera: Det omvända gäller inte,
dvs kontinuitet $\nRightarrow$ Lipschitz-kontinuitet
dvs $\exists f: f$ kontinuerlig men ej Lipschitz.
Räcker att hitta ett moterexempel.

$$\text{Tag } |f(x) = \sqrt{|x|}|$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$$

så f är kontinuerlig.

Men:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L_f |x_1 - x_2| ?$$

$$\text{Tag } x_1 = x, x_2 = 0:$$

$$|f(x) - 0| \leq L_f |x - 0|$$

$$|f(x)| \leq L_f |x|$$

$$\sqrt{|x|} \leq L_f |x|$$

$$|x| \leq L_f^2 |x|^2 \quad (x \neq 0)$$

$$L_f^2 \geq 1/|x|$$

$\Rightarrow L_f$ tvingas att vara
oändligt stor eftersom $|x|$
kan bli oändligt litet!

$\therefore f$ är ej Lipschitz-kontinuerlig

(Däremot är den Hölder-kontinuerlig...)

Övning: Visa att $f(x) = x^\alpha$ inte
är Lipschitz-kontinuerlig
på $[0,1]$ för $0 < \alpha < 1$.

Övning: Visa att $f(x) = x^\alpha$
är Lipschitz-kontinuerlig
på $[\varepsilon, 1]$ för $0 < \alpha < 1$.

(Litet $\neq$ vilket som
helst (inte det i
definitionen!))

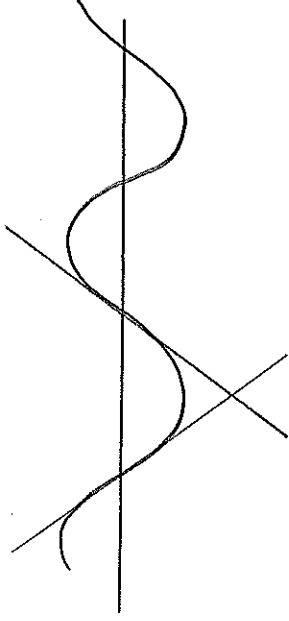
* Exempel: $f(x) = x^2 \quad I = [a, b]$

$$\begin{aligned}
 |f(x_1) - f(x_2)| &= |x_1^2 - x_2^2| \\
 &= |(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)| \\
 &= |x_1 + x_2| \cdot |x_1 - x_2| \\
 &\leq (|x_1| + |x_2|) \cdot |x_1 - x_2| \\
 &\leq \underbrace{2 \cdot \max(|a|, |b|)}_{= Lf} \cdot |x_1 - x_2| \\
 \therefore Lf &= 2 \max(|a|, |b|)
 \end{aligned}$$

* Exempel: $f(x) = \sin x \quad I = (-\infty, \infty)$

$$\begin{aligned}
 |f(x_1) - f(x_2)| &= |\sin(x_1) - \sin(x_2)| \\
 &= \left| \frac{\sin(x_1) - \sin(x_2)}{x_1 - x_2} \right| \cdot |x_1 - x_2| \\
 &= \left| \frac{\sin(x_1) - \sin(x_2)}{x_1 - x_2} \right| \cdot |x_1 - x_2|
 \end{aligned}$$

$\frac{\sin(x_1) - \sin(x_2)}{x_1 - x_2}$ är lutningen $\frac{\Delta y}{\Delta x}$



Blir som störst 1!

$$\therefore |f(x_1) - f(x_2)| \leq \underbrace{1}_{Lf} \cdot |x_1 - x_2|$$

$$\therefore Lf = 1$$

* Sats: $Lf = \max_I |f'|$

Beris: Medelvärdesatsen ger

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(\xi) \cdot (x_1 - x_2), \quad \xi \in (x_1, x_2)$$

$$\Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| = |f'(\xi)| \cdot |x_1 - x_2|$$

$$\leq \max_{x \in I} |f'(x)| \cdot |x_1 - x_2|$$

$$= Lf, \text{ om begränsad.}$$

Om f är
deriverbar och
 $|f'|$ begränsad.

* Sats: En Lipschitz-kontinuerlig funktion på ett begränsat intervall är begränsad

Bevis: (Superelement!)

Tag $\bar{x} \in I$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow |f(x)| &= |f(x) - f(\bar{x}) + f(\bar{x})| \\ &\leq |f(x) - f(\bar{x})| + |f(\bar{x})| \\ &\leq L_f \cdot \underbrace{|x - \bar{x}|}_{\leq |I|} + |f(\bar{x})| \\ &\leq L_f \cdot I + |f(\bar{x})| < \infty. \end{aligned}$$

Notera: Viktigt att intervaller är begränsade!

$f(x) = x$ Lipschitz på $(-\infty, \infty)$ men ej begränsad!

* Sats: Egenskaper för Lipschitz-kontinuerliga funktioner

Om f och g är Lipschitz-

kontinuerliga på I med konstanter

L_f och L_g och f och g är

begränsade med $|f(x)| \leq M_f$, $|g(x)| \leq M_g$

så gäller att

1. $f+g$ Lipschitz med $L = L_f + L_g$

2. $f-g$ Lipschitz med $L = L_f + L_g$

3. fg Lipschitz med $L = M_f L_g + M_g L_f$

4. αf Lipschitz med $L = |\alpha| L_f$

5. f/g Lipschitz med $L = \frac{M_f L_g + M_g L_f}{\alpha^2}$

om $|g(x)| \geq \alpha > 0$.

6. $f \circ g$ Lipschitz med $L = L_f L_g$

Beris: (Av 3)

$$|f g(x_1) - f g(x_2)| = |f(x_1)g(x_1) - f(x_2)g(x_2)|$$

$$= |f(x_1)g(x_1) - f(x_1)g(x_2) + f(x_1)g(x_2) - f(x_2)g(x_2)|$$

↖ Lägg till och dra ifrån - bra trick!!!

$$\leq |f(x_1)g(x_1) - f(x_1)g(x_2)| + |f(x_1)g(x_2) - f(x_2)g(x_2)|$$

↖ triangelolikheten - bra olikhet!!!

$$= \underbrace{|f(x_1)| \cdot |g(x_1) - g(x_2)|}_{\leq M_f} + \underbrace{|g(x_2)| \cdot |f(x_1) - f(x_2)|}_{\leq M_g}$$

$$\leq L_g |x_1 - x_2| + M_g \leq L |x_1 - x_2|$$

$$= M_f L_g \cdot |x_1 - x_2| + M_g L_f \cdot |x_1 - x_2|$$

$$= \underbrace{(M_f L_g + M_g L_f)}_{= L} \cdot |x_1 - x_2|$$

Kanske de två
mer användbara
knep!



* Vi har hittills studerat:

- Gränsvärden: $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \varepsilon - \delta$
- Kontinuitet: $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = f(\bar{x})$
- Lipschitz-kontinuitet:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L_f |x_1 - x_2|$$

Vi kommer att använda Lipschitz-kontinuitet för att konstruera och analysera iterativa (numeriska) metoder för att lösa ekvationer:

- Bisektion $\rightarrow$ Praktisk metod
- Fixpunktsiteration $\rightarrow$ Bevis av Bolzaans sats
- Newtons metod $\rightarrow$ en typ av

Extra exempel i mån av tid:
Bestäm L_f för

- 1) $f(x) = \sqrt{x}$, $I = [3, 4]$ ($L_f = 6$)
(kan lösas explicit eller med derivata⁵⁵)
- 2) $f(x) = \exp(5x)$, $I = [0, 1]$ ($L_f = 5e$)
(derivata)
- 3) $L(f \circ (f + f)) = 4L_f L_f^2$

$\swarrow$ Kommer i Lärvecka 6!