* Idag: Ekvationer, rötter, fixpunkter
$\boxed{F15}$ Bisektionsalgoritmen & Bolzanos sats
(AL 6.1–2)

* 6.1 Ekvationer, rötter och fixpunkter

Definition: Ekvation

En logisk utsaga $P(x) = Q(x)$ som är sann för inga, något, flera eller alla $x$. En lösning $\bar{x}$ är ett tal som uppfyller ekvationen.

Definition: Rot

Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. En rot $\bar{x}$ till $f$ är en lösning till ekvationen $\boxed{f(x) = 0}$

Definition: Fixpunkt

Låt $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. En fixpunkt $\bar{x}$ till $g$ är en lösning till ekvationen $\boxed{x = g(x)}$

• Omskrivning av ekvationer

$\boxed{P(x) = Q(x)}$ ← allmän form

$P = f$, $Q = 0$ (enkelt) $f = P - Q$

$\boxed{f(x) = 0}$ ← normalform

$f = x - g$ ?

$\boxed{x = g(x)}$ ← fixpunktsform

Enkelt recept: (ett av oändligt många)

$f(x) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \alpha f(x) = 0, \quad \alpha \neq 0$

$\Leftrightarrow \quad x + \alpha f(x) = x$

$\boxed{x = x + \alpha f(x)}$

Exempel:

Allmän form:

$$x = \cos x$$

Normalform:

$$\underbrace{x - \cos x}_{f(x)} = 0$$

Fixpunktsform:

$$x = x + \alpha\,(x - \cos x)$$

$$x = x - 0.1 \cdot (x - \cos x)$$

$$x = x + \pi \cdot (x - \cos x)$$

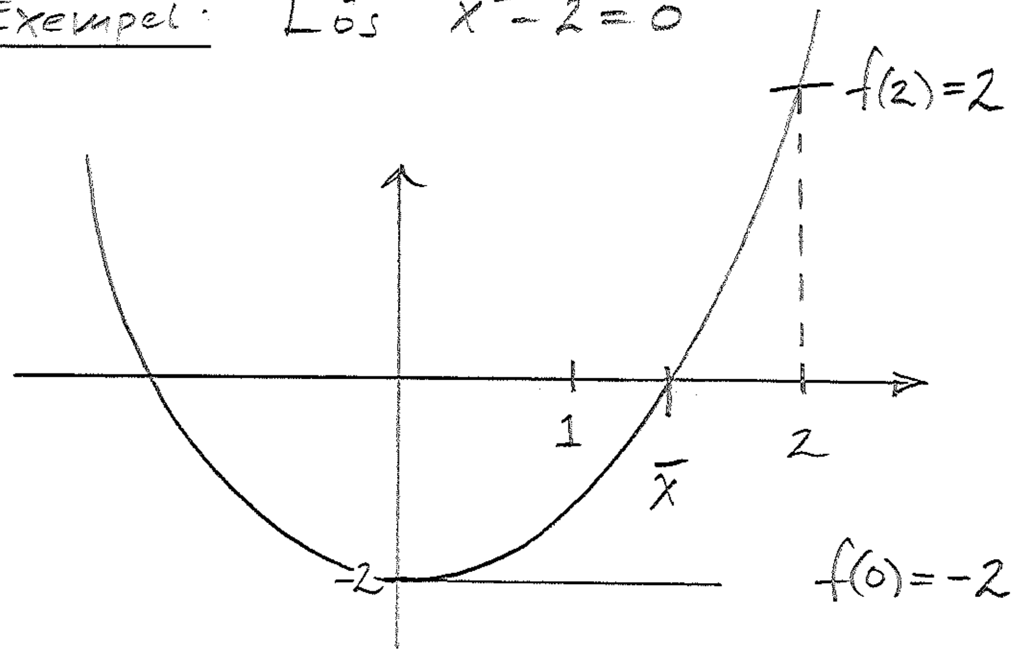
$$x = \cos x \quad (!)$$

$$x = x + \underbrace{\frac{-1}{1 + \sin x}}_{=\alpha} \cdot (x - \cos x)$$

## 6.2 Bisektionsalgoritmen

Generell metod för att lösa ekvationen $f(x) = 0$ för $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Exempel: Lös $x^2 - 2 = 0$




Notera:

- $f(0) = 0^2 - 2 = -2 < 0$
  $f(2) = 2^2 - 2 = 2 > 0$

$\therefore$ Sök $\bar{x}$ på intervallet $[0, 2]$.

(Den sista omskrivningen skall vi prata mer om på F17!)

- Undersök mittpunkten $x = 1$:

$$f(1) = 1^2 - 2 = -1 < 0$$

$\therefore$ Sök $\bar{x}$ på intervallet $[1, 2]$

- Undersök mittpunkten $x = 1.5$:

$$f(1.5) = 1.5^2 - 2 = 0.25 > 0$$

$\therefore$ Sök $\bar{x}$ på intervallet $[1, 1.5]$

- Undersök mittpunkten $x = 1.25$

$$f(1.25) = 1.25^2 - 2 = -0.4375 < 0$$

$\therefore$ Sök $\bar{x}$ på intervallet $[1.25, 1.5]$

Upprepa för att stänga in $\bar{x} = \sqrt{2}$ på allt mindre intervall!

$$f(x) = x^2 - 2$$

| | 0 | 1 | 1.25 | 1.5 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $n=0$: | $-2$ | $-1$ | | | $2$ |
| $n=1$: | | $-1$ | | $0.25$ | $2$ |
| $n=2$: | | $-1$ | $-0.4375$ | $0.25$ | |
| $n=3$: | | | $-0.4375$ | $0.25$ | |
| | | | $<0$ | $>0$ | |

Roten $\bar{x} = \sqrt{2} \approx 1.41 \in (1.25, 1.5)$.

För att formulera algoritmen, låt

$$\begin{cases} x_n = \text{vänster ändpunkt i steg } n \\ \bar{X}_n = \text{höger ändpunkt i steg } n \\ \hat{x}_n = \text{mittpunkten i steg } n \end{cases}$$

$$y_n = f(x_n) \quad \hat{y}_n = f(\hat{x}_n) \quad \bar{Y}_n = f(\bar{X}_n)$$

I vårt exempel har vi:

| | $x_n$ | $\hat{x}_n$ | $\bar{x}_n$ | $y_n$ | $\hat{y}_n$ | $\bar{y}_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n=0$ | 0 | 1 | 2 | −2 | −1 | 2 |
| $n=1$ | 1 | 1.5 | 2 | −1 | 0.25 | 2 |
| $n=2$ | 1 | 1.25 | 1.5 | −1 | −0.4375 | 0.25 |
| $n=3$ | 1.25 | 1.375 | 1.5 | −0.4375 | $< 0$ | 0.25 |

Notera: Endast $\hat{x}_n$ och $\hat{y}_n$ behöver beräknas i varje steg!

## Bisektionsalgoritmen:

$x_0 \leftarrow a$
$\bar{x}_0 \leftarrow b$
$y_0 \leftarrow f(x_0)$
$\bar{y}_0 \leftarrow f(\bar{x}_0)$
$n \leftarrow 0$
while $\bar{x}_n - x_n > TOL$ do — tolerans / noggrannhet
  $\hat{x}_n \leftarrow (x_n + \bar{x}_n)/2$
  $\hat{y}_n \leftarrow f(\hat{x}_n)$
  if $y_0 \hat{y}_n < 0$ — byter tecken på vänstra intervallet
    $x_{n+1} \leftarrow x_n$
    $\bar{x}_{n+1} \leftarrow \hat{x}_n$
  else if $y_n \bar{y}_0 < 0$ — byter tecken på högra intervallet
    $x_{n+1} \leftarrow x_n$
    $\bar{x}_{n+1} \leftarrow \bar{x}_n$
  else
    break — Vi hittade $\bar{x}$!
  end if
  $n \leftarrow n+1$
end while

Den approximativa lösningen ges av $\hat{x} = \hat{x}_n$.

Naturliga frågor:

1) Konvergerar $(x_n)$, $(\hat{x}_n)$ och $(X_n)$?

2) Om de konvergerar mot något $\bar{x}$, är då $\bar{x}$ en rot?

Besvaras av Bolzanos sats som bevisas genom att genomföra bisektionsalgoritmen!

**Bolzanos sats:**

Om $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig på det slutna begränsade intervallet $[a, b]$ och $f(a) \cdot f(b) < 0$ så har $f(x) = 0$ (minst) en rot $\bar{x} \in (a, b)$, dvs

$$\exists\, \bar{x} \in (a, b) : f(\bar{x}) = 0.$$

**Bevis:**

(Vi antar i tillägg att $f$ är Lipschitz-kontinuerlig.)

Bevisidé:

(i) Generera en talföljd $(x_n)$

(ii) Visa att $(x_n)$ är Cauchy och därmed konvergent mot något $\bar{x}$.

(iii) Visa att $\bar{x}$ är en rot, dvs $f(\bar{x}) = 0$.

---

(i) Låt $x_n$ = vänster ändpunkt i steg $n$ av bisektionsalgoritmen.

(ii) Antag (utan inskränkning) att $m \leq n$:


$$\Rightarrow |x_m - x_n| = x_n - x_m \leq X_n - x_m \leq X_m - x_m = 2^{-m} \cdot (b-a).$$

$\therefore \; |x_m - x_n| \to 0$ då $m, n \to \infty$.

$\therefore \; (x_n)$ Cauchy-följd

$\Rightarrow (x_n)$ konvergent

dvs $\exists \, \bar{x} \in \mathbb{R} : x_n \to \bar{x}$

Enligt konstruktion gäller att $\bar{x} \in (a,b)$.

(ii) Visa att $f(\bar{x}) = 0$.

Antag (utan inskränkning) att $f(a) < 0$.

$\Rightarrow f(x_n) < 0 , \; f(X_n) > 0$ för alla $n$.

ty $f$ kontinuerlig

$$\Rightarrow |f(\bar{x})| = |f(\lim_{n\to\infty} x_n)| = |\lim_{n\to\infty} f(x_n)|$$

$$= \lim_{n\to\infty} -f(x_n) \leq \lim_{n\to\infty} -f(x_n) + f(X_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} |f(X_n) - f(x_n)| \leq \lim_{n\to\infty} L_f \cdot |X_n - x_n|$$

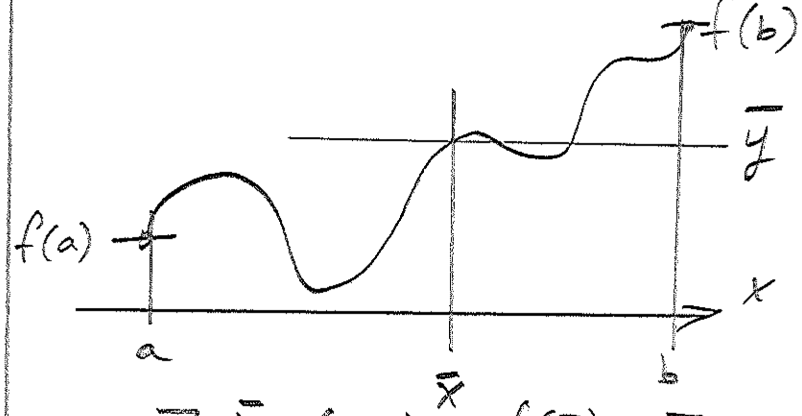
$$= 0.$$

$\therefore \; f(\bar{x}) = 0$. ▨

**Korollarium:**

Satsen om mellanliggande värden.

Om $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig på det slutna begränsade intervallet $[a, b]$ så antar $f$ alla värden mellan $f(a)$ och $f(b)$.




$\exists \, \bar{x} \in (a,b) : f(\bar{x}) = \bar{y}$

**Bevis:**

Låt $h(x) = f(x) - \bar{y}$.

Notera att $h(a) \cdot h(b) < 0$.

Bolzano $\Rightarrow \exists \, \bar{x} : h(\bar{x}) = 0$. ▨