

* Idag: Fixpunktsalgoritmen

Baraachs fixpunktsats

F16

(AL 6.3)

"Kanske den mest episka föreläsningen."

6.3 Fixpunktsalgoritmen

Lös ekvationen $f(x)=0$ genom att skriva om på fixpunktsform

$x=g(x)$ och fixpunktsiterera:

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

för $n=0, 1, 2, \dots$

Konvergerar förhoppningsvis (!)

mot en fixpunkt $\bar{x} = g(\bar{x})$.

Exempel: $f(x) = x^2 - 2$

Omskrivning $x = \underbrace{x + \alpha f(x)}_{=g(x)}$

(1) $\alpha = -0.2$

$\Rightarrow g(x) = x - 0.2 \cdot f(x)$

(2) $\alpha = +0.2$

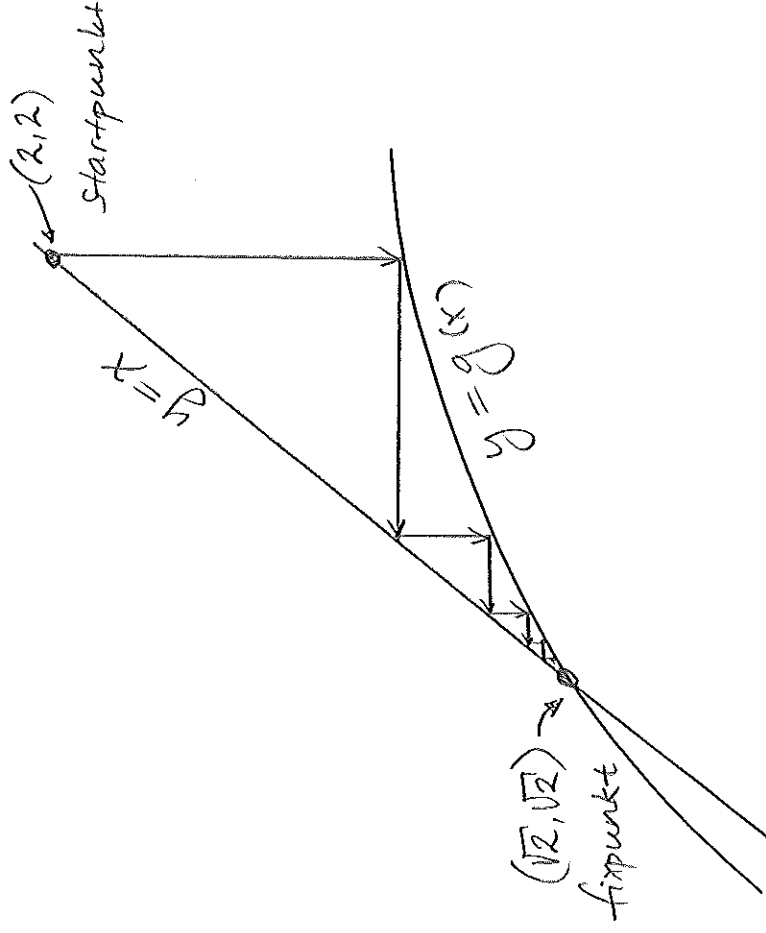
$\Rightarrow g(x) = x + 0.2 \cdot f(x)$

(3) $\alpha = -1 / (2x)$

$\Rightarrow g(x) = \frac{x + 2/x}{2}$

(Se problem P6.2!)

Illustration av (1) för $x_0 = 2$.

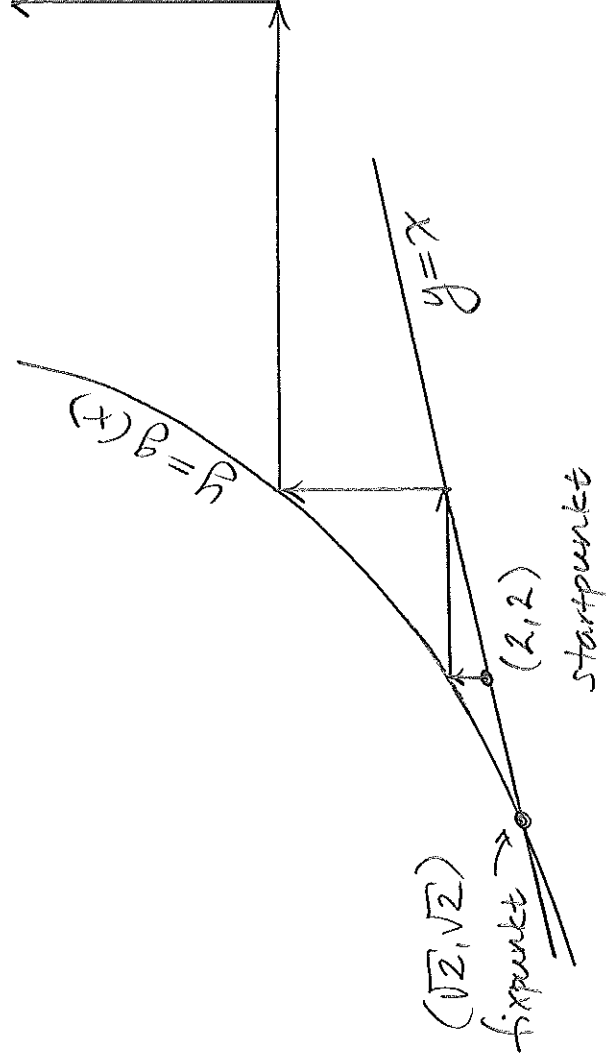


Konvergerar mot fixpunkten $\bar{x} = \sqrt{2}$.

Notera: $g' < \frac{d}{dx} x = 1$

$\Rightarrow$ Iterationen stängs in mellan kurvorna och konvergerar.

Illustration av (2) för $x_0 = 2$



Iterationen divergerar

Notera: $g' > \frac{d}{dx} x = 1$

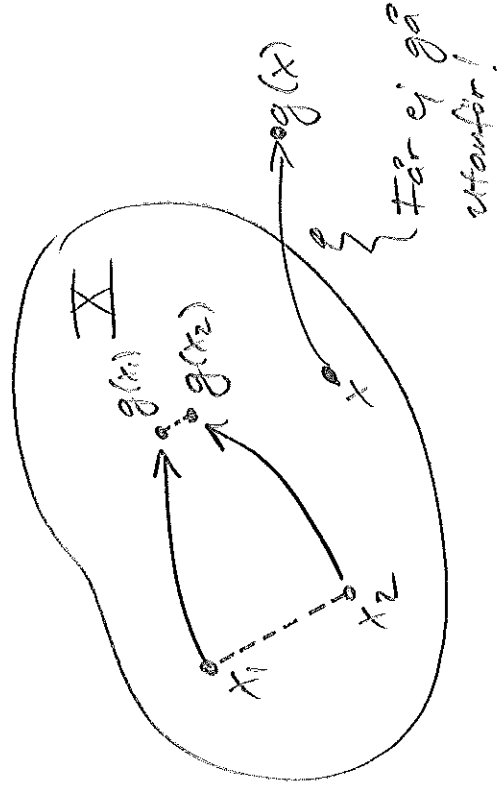
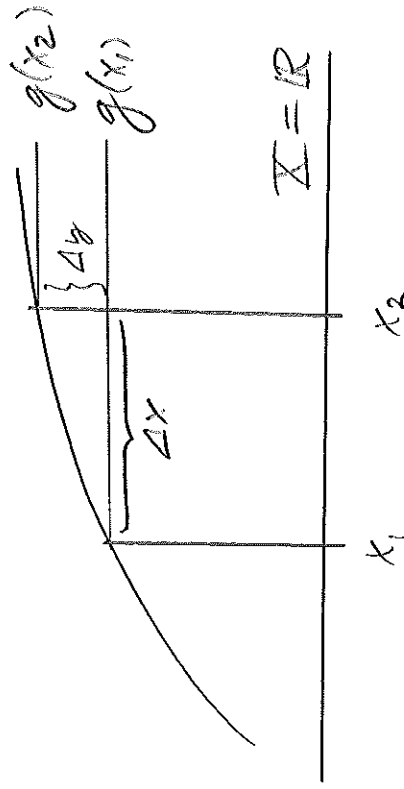
$\Rightarrow$ Iterationen smiter iväg!

När konvergerar fixpunktiterationen?

Svar: Banachs fixpunktsats!

Definition: Kontraktionsavbildning

En kontraktionsavbildning på $X \subseteq \mathbb{R}$ är en funktion $g: X \rightarrow X$ med Lipschitzkonstant $L_g < 1$.



Sats: Banachs fixpunktsats

Om $g: I \rightarrow I$ är en kontraktion på det slutna intervallet I så har g en entydig fixpunkt på I , dvs

$$\exists! \bar{x} \in I : \bar{x} = g(\bar{x}).$$

Lemma: Geometrisk summa

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1-x^n}{1-x}$$

(Bevis: Se introtatten!)

Bevis: (Av Banach)

Bevisidé: (i) Generera en talföljd (x_n)

(ii) Visa att (x_n) är Cauchy
 $\Rightarrow x_n \rightarrow \bar{x}$

(iii) Visa att $\bar{x}$ är en fixpunkt,
dvs $\bar{x} = g(\bar{x})$

(iv) Visa att $\bar{x}$ är unik

(i) Välj godtyckligt $x_0 \in I$ och lät

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad n=0,1,2,\dots$$

(ii) Betrakta först skillnaden $x_{k+1} - x_k$:

$$\begin{aligned} |x_{k+1} - x_k| &= |g(x_k) - g(x_{k-1})| \\ &\leq L_g \cdot |x_k - x_{k-1}| \\ &\leq L_g^2 \cdot |x_{k-1} - x_{k-2}| \\ &\leq \dots \leq L_g^k \cdot |x_1 - x_0| \quad (*) \end{aligned}$$

($\rightarrow$ 0 då $k \rightarrow \infty$ men räcker ej)

Betrakta nu skillnaden $x_m - x_n$ och antag (utan inskränkning) att $m \leq n$.

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &= |x_m - x_{m+1}| + |x_{m+1} - x_{m+2}| + \dots + |x_{n-1} - x_n| \\ &\quad \text{(triangelolikheten)} \\ &\leq |x_m - x_{m+1}| + |x_{m+1} - x_{m+2}| + \dots + |x_{n-1} - x_n| \\ &\quad (*) \\ &\leq L_g^m \cdot |x_1 - x_0| + L_g^{m+1} \cdot |x_1 - x_0| + \dots + L_g^{n-1} \cdot |x_1 - x_0| \end{aligned}$$

$$= L_g^m \cdot (1 + L_g + L_g^2 + \dots + L_g^{n-m-1}) |x_1 - x_0|$$

$$= L_g^m \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-m-1} L_g^k \right) \cdot |x_1 - x_0|$$

(Lemma)

$$= L_g^m \cdot \frac{1 - L_g^{n-m}}{1 - L_g} \cdot |x_1 - x_0|$$

$$\leq L_g^m \cdot \frac{1}{1 - L_g} \cdot |x_1 - x_0|$$

$\rightarrow 0$ då m (och n) $\rightarrow \infty$

ty $L_g < 1$.

$\therefore (x_n)$ Cauchy-följd
(på slutet intervall I)

$$\Rightarrow \exists \bar{x} \in I : x_n \rightarrow \bar{x}.$$

Är $\bar{x}$ en fixpunkt?

(iii) Visa att $\bar{x}$ är en fixpunkt:

$$g(\bar{x}) = g(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) \stackrel{g \text{ kontinuerlig}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$$

 $\therefore \bar{x}$ är en fixpunkt(iv) Visa att $\bar{x}$ är unik:

Antag att det finns två fixpunkter:

$$\begin{cases} \bar{x} = g(\bar{x}) \\ \tilde{x} = g(\tilde{x}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow |\bar{x} - \tilde{x}| = |g(\bar{x}) - g(\tilde{x})|$$

$$\leq Lg \cdot |\bar{x} - \tilde{x}|$$

$$\bar{x} - \tilde{x} \neq 0 \Rightarrow 1 \leq Lg \quad \text{:-)}$$

$$\therefore \bar{x} - \tilde{x} = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \tilde{x}.$$

 $\therefore \bar{x}$ unik.Fixpunktsalgoritmen:

$$x_1 \leftarrow g(x_0)$$

$$n \leftarrow 0$$

while $|x_n - x_{n+1}| > \text{TOL}$ do

$$n \leftarrow n+1$$

$$x_{n+1} \leftarrow g(x_n)$$

end while

$$\bar{x} \leftarrow x_{n+1}$$

lösningen (approximation)

Exempel: Fungerar även i flera

dimensioner, t.ex.

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{cases} 3x + 2y^2 = 5 \end{cases}$$

$$\sin(\pi x/2) \cdot (1 + y^3) = 2$$

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} 3x + 2y^2 - 5 \\ \sin(\pi x/2) \cdot (1 + y^3) - 2 \end{pmatrix}$$

$$g(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \alpha \cdot f(x, y)$$

Konvergerar mot fixpunkten

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

för $\alpha = -1$.

Fördel relativt bisektion:

- Kan konvergera mycket snabbare
- Fungerar i flera dimensioner

Nackdel:

- Svårighet att bestämma α så att $L_g < 1$.

A

Men: Newtons metod kommer ge oss ett recept att bestämma α !