* **Idag:** Newtons metod
Konvergenshastighet

$\boxed{F17}$ (AL 6.4–5)

* **6.4 Newtons metod**

Fixpunktsiteration:

$$x_{n+1} = x_n + \alpha f(x_n)$$

Potentiellt effektiv metod för ekvationslösning men hur välja α för att få konvergens?

Grundproblem: f ej linjär

$\Rightarrow$ Svår att lösa ut x

Lösning: Linjärisera!

$$f(x) = f(\bar{x}) + f'(\xi)\cdot(x-\bar{x})$$
$$\approx f(\bar{x}) + f'(\bar{x})\cdot(x-\bar{x})$$

Ersätt $f(x) = 0$

med $\underbrace{f(\bar{x}) + f'(\bar{x})\cdot(x-\bar{x}) = 0}_{\text{Kan lösas för } x!}$

Men: Känner inte till $\bar{x}$.

Använd istället startgissning x_0:

$$f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) = 0$$
$$f'(x_0)\cdot(x-x_0) = -f(x_0)$$
$$x - x_0 = -f(x_0)/f'(x_0)$$
$$x = \underbrace{x_0 - f(x_0)/f'(x_0)}_{\text{Approximativ lösning till } f(x)=0.}$$

Upprepa:

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$ Newtons metod

Förhoppningen är att x_{n+1} är en bättre approximation än x_n.

Notera: Motsvarar

$$x_{n+1} = x_n + \alpha f(x_n)$$

med

$$\boxed{\alpha = -\frac{1}{f'(x_n)}}$$

Exempel: $f(x) = x^2 - 2 = 0$

$\Rightarrow \quad f'(x) = 2x$

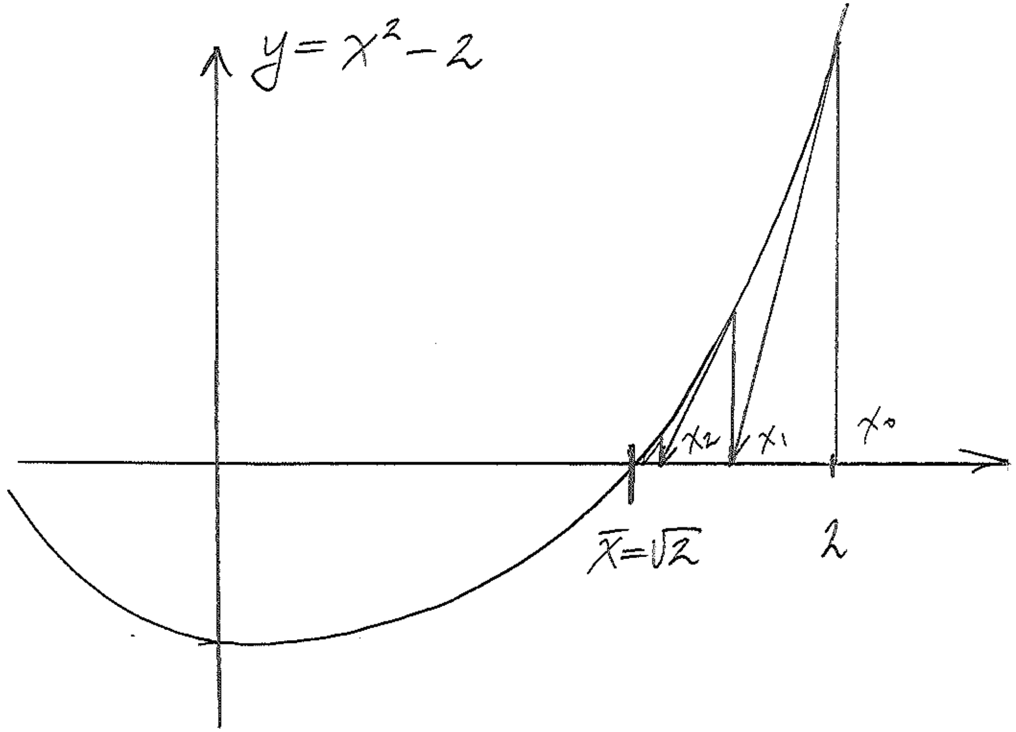
$$\Rightarrow \quad g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$= x - \frac{x^2-2}{2x}$$

$$= x - \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{x} = \boxed{\frac{x + 2/x}{2}}$$

Känner vi igen!



Konvergerar mycket snabbt mot roten $\bar{x} = \sqrt{2}$!

- Varför konvergerar det så snabbt?

$$g(x) = \frac{x + 2/x}{2} = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \quad g'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \quad g'(\sqrt{2}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{(\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$\Rightarrow \quad g' \approx 0$ i närheten av fixpunkten

$\Rightarrow \quad L_g \approx 0 \Rightarrow$ mycket snabb konvergens

- Newtons metod (algoritm):

$n \leftarrow 0$
while $|f(x_n)| > TOL$ do
  $x_{n+1} \leftarrow x_n - f(x_n)/f'(x_n)$
  $n \leftarrow n+1$
end while
$\hat{x} \leftarrow x_n$

lösningen (approximation)

* 6.5 Konvergenshastighet

Hur snabbt (och när) konvergerar bisektion, fixpunktsiteration och Newtons metod?

- Definition: Konvergensordning

Talföljden (x_n) med gränsvärde $\bar{x}$ har konvergensordning p om

$$|\bar{x} - x_{n+1}| \le \mu \cdot |\bar{x} - x_n|^p$$

för något $\mu > 0$. (Kräv också $\mu < 1$ om $p = 1$.)

$p = 1$: linjär konvergens (bisektion, fixpunkt)

$p = 2$: kvadratisk konvergens (Newton)

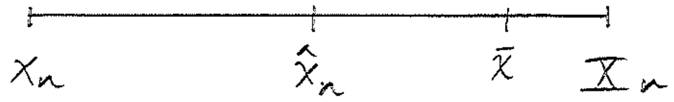
- Sats: Konvergenshastighet för bisektion

Om förutsättningarna i Bolzanos sats är uppfyllda så konvergerar bisektion "linjärt":

$$|\bar{x} - \hat{x}_n| \le 2^{-(n+1)} \cdot (b-a)$$

<u>Bevis:</u> Enligt Bolzano existerar $\bar{x}$ och:

$$|\bar{x} - \hat{x}_n| \leq \underbrace{|x_n - X_n|}_{= 2^{-n} \cdot (b-a)} / 2 = 2^{-(n+1)} \cdot (b-a)$$



■

- <u>Sats:</u> Konvergenshastighet för fixpunkt

Om förutsättningarna i Banachs sats är uppfyllda så konvergerar fixpunktsiterationen <u>linjärt:</u>

$$|\bar{x} - x_{n+1}| \leq L_g \cdot |\bar{x} - x_n| \qquad (*)$$

$\mu = L_g$

Det gäller också att

$$|\bar{x} - x_n| \leq L_g^n \cdot |x_1 - x_0| \qquad (**)$$

<u>Bevis:</u> Enligt Banach existerar $\bar{x}$ och:

$$|\bar{x} - x_{n+1}| = |g(\bar{x}) - g(x_n)| \leq L_g \cdot |\bar{x} - x_n| \quad (*)$$

(**) P.s.s. (på samma sätt) ■

- <u>Sats:</u> Konvergenshastighet för Newton

Låt $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara två gånger kontinuerligt deriverbar på det slutna intervallet I (dvs $f \in C^2(I)$).

Om x_0 ligger tillräckligt nära roten $\bar{x} \in I$ så konvergerar Newtons metod kvadratiskt mot $\bar{x}$:

$$|\bar{x} - x_{n+1}| \leq \frac{1}{2} K M |\bar{x} - x_n|^2$$

$\mu = \frac{1}{2} K M$

Det gäller också att

$$|\bar{x} - x_n| \leq M |f(x_n)|$$

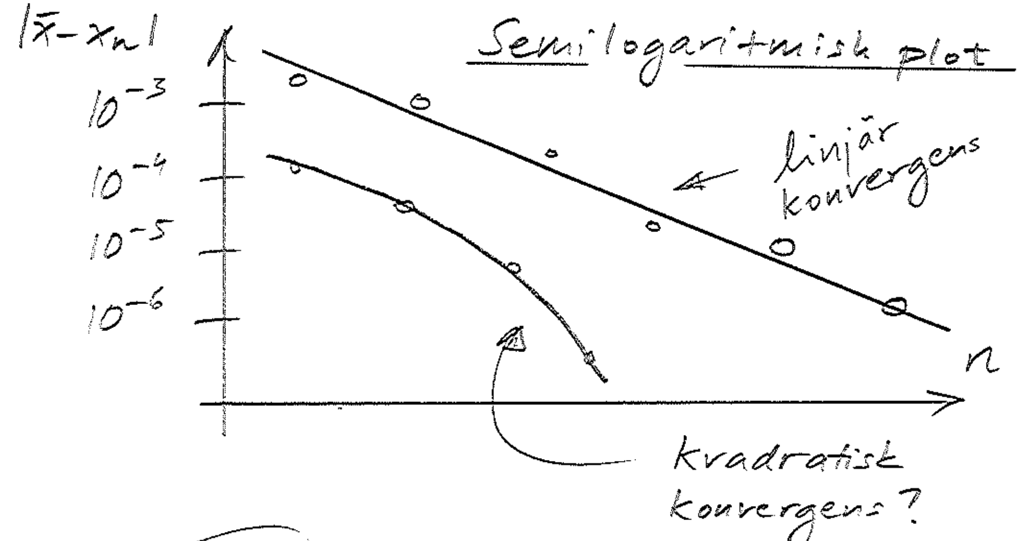
där $M = \max_I 1/|f'| < \infty$, $K = \max_I |f''|$

<u>Bevis:</u> Se boken (överkurs)

- Bestämma konvergenshastigheten

$$|\bar{x} - x_{n+1}| \le \mu |\bar{x} - x_n|^p \quad (*)$$

Semilogaritmisk plot



$p=1 \Rightarrow |\bar{x} - x_n| \le \mu |\bar{x} - x_{n-1}|$
$\le \mu^2 |\bar{x} - x_{n-2}|$
$\le \dots$
$\le \mu^n |\bar{x} - x_0|$

$$\Rightarrow \ln |\bar{x} - x_n| \le n \cdot \underbrace{\ln \mu}_{= q_1} + \underbrace{\ln |\bar{x} - x_0|}_{= q_0}$$

$\therefore$ Om $p=1$ får vi en <u>rät linje</u> i en semilogaritmisk plot:

$$\ln |\bar{x} - x_n| \sim \underbrace{q_0 + q_1 \cdot n}_{\text{polynom i } n}$$

Koefficienterna q_0 och q_1 erhålls med kommandot <u>polyfit</u> i MATLAB / Pylab:

$$[q_1, q_0] = \text{polyfit}(\log(e), n, 1)$$

e ← $|\bar{x} - x_n|$

$$\ln \mu = q_1$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{\mu = \exp(q_1)}}$$

Om ej rät linje måste konvergenshastigheten bestämmas ($p \ne 1$). Plotta $|\bar{x} - x_{n+1}|$ som funktion av $|\bar{x} - x_n|$ i en loglog-plot.

Logaritmera (*):

$$\Rightarrow \ln|\bar{x}-x_{n+1}| \le \underbrace{\ln\mu}_{q_0} + \underbrace{p}_{q_1}\ln|\bar{x}-x_n|$$

Verifiera att linjen är rät och bestäm q_0, q_1 med polyfit.

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu = \exp(q_0) \\ p = q_1 \end{cases}$$

Obs! Extrahera punkter från den "asymptotiska regimen"!