

* Idag: Potensserier

Taylorserier

F20

Adams/Essex 9.5-6

* Definition: Potensserie ("power series")

En serie på formen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - \bar{x})^n$$

kallas för potensserie runt $x = \bar{x}$.

$\{a_n\}$ kallas seriens koefficienter.

* Central fråga: När konvergerar en potensserie? För vilka x ?

Svaret ges av följande sats.

Notera: Konvergerar trivialt i punkten $x = \bar{x}$.

* Sats: Potensseriers konvergens

För alla potensserier måste ett av följande alternativ gälla:

(i) Konvergerar endast i $x = \bar{x}$

(ii) Konvergerar för alla $x \in \mathbb{R}$

(iii) Konvergerar för $|x - \bar{x}| < R$
för något R (konvergensradien) och

divergerar för $|x - \bar{x}| > R$.

För $|x - \bar{x}| = R$ (de två ändpunkterna)

kan serien antingen konvergera eller

divergera (ej nödvändigtvis samma

i båda ändpunkterna).

I alla dessa fall (förutom i ändpunkterna)

är eventuell konvergens alltid absolut.

Bevis:

Räcker att visa att om serien konvergerar i någon punkt $\tilde{x} \neq \bar{x}$, så konvergerar den i alla punkter som ligger närmare $\bar{x}$, dvs $|x - \bar{x}| < |\tilde{x} - \bar{x}|$.

(Logiken här är: antingen inga ($x = \bar{x}$), alla ($x \in \mathbb{R}$) eller några x , och om det är några så måste det vara ett intervall $(\bar{x} - R, \bar{x} + R)$ för något R .)

Antag: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (\tilde{x} - \bar{x})^n$ konvergerar

$$\Rightarrow a_n (\tilde{x} - \bar{x})^n \rightarrow 0 \text{ enligt termtestet}$$

$$\Rightarrow |a_n (\tilde{x} - \bar{x})^n| \leq K \quad \forall n \text{ för något } K$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n (\tilde{x} - \bar{x})^n| = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{|a_n (\tilde{x} - \bar{x})^n| \cdot \left| \frac{x - \bar{x}}{\tilde{x} - \bar{x}} \right|}_{\leq K} \underbrace{\left| \frac{x - \bar{x}}{\tilde{x} - \bar{x}} \right|}_{= r < 1}$$

$$\leq K \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{K}{1-r} < \infty$$

$\therefore$ Konvergerar absolut. 

Exempel:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$a_n = 1 \quad \forall n, \quad \bar{x} = 0$ ← Geometrisk summa!

Konvergerar för $x \in (-1, 1)$,

dvs centrum $\bar{x} = 0$ och konvergensradie

$R = 1$.

* Att hitta konvergensradien R

Använd kvottestet:

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} \cdot (x - \bar{x})^{n+1}}{a_n \cdot (x - \bar{x})^n} \right|$$

$$= |x - \bar{x}| \cdot \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|}_{= L}$$

$$= |x - \bar{x}| \cdot L$$

Konvergerar (absolut) då $\rho < 1$,

dvs $|x - \bar{x}| < \frac{1}{L} = R$.

* Exempel: Bestäm en potensserie

för $\frac{1}{(1-x)^2}$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-x)^2} &= \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x} \\ &= \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} x^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n \\ &= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots\end{aligned}$$

för $-1 < x < 1$.

* Definition: Taylorserie

Om funktionen f är slät (dvs ändligt deriverbar) i en omgivning till $x = \bar{x}$ så kallas

serien
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x})^n$$

Taylor-serien till f runt $x = \bar{x}$.

Notera:

- Om $\bar{x} = 0$ kallas det Maclaurin-serie
- Serien är ett "ändligt Taylor-pdynom"
- Serien är en potensserie
- Konvergerar därför inom en konvergensradie R , där $R = 0$, $R \in (0, \infty)$ eller $R = \infty$.
- Behöver inte konvergera mot $f(x)$!
- Om en potensserie $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - \bar{x})^n$ konvergerar

i x , så gäller att

$$\frac{d}{dx} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - \bar{x})^n}_{g(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n (x - \bar{x})^{n-1}$$

(en omgivning till $\bar{x}$)

$\Rightarrow$

$$g'(\bar{x}) = a_1$$

* Några kända Maclaurin-serier (att kunna!)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad x \in (-1, 1)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, \quad x \in (-1, 1]$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad x \in (-1, 1]$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n, \quad x \in \mathbb{R}$$

Öving: Skriv ett program för att beräkna π med (ca) 10 decimaler baserat på Maclaurin-utvecklingen av $\tan^{-1}$.

*Exempel: Bestäm Maclaurin-serien för

$$f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \cdot \sin x^2 = \frac{1}{x} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (x^2)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{4n+2-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{4n+1}$$