

* Idag: Frågestund
Tentarakning

F21-2016

* Tenta 2014-01-18, uppgift 9

Maclaurin för $\sin(2x)$:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$\sin(2x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} (2x)^{2n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

* Lipschitz från definition, uppg. 5.3a)

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1}, \quad I = [0, 1]$$

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left| \frac{x_1^2}{x_1+1} - \frac{x_2^2}{x_2+1} \right| =$$

$$= \frac{|x_1^2 \cdot (x_2+1) - x_2^2 \cdot (x_1+1)|}{|x_1+1| \cdot |x_2+1|}$$

$$= \frac{|x_1^2 x_2 - x_1 x_2^2 + x_1^2 - x_2^2|}{|x_1+1| \cdot |x_2+1|}$$

$$= \frac{|x_1+1| \cdot |x_2+1|}{|x_1+1| \cdot |x_2+1|}$$

$$= \frac{|x_1 x_2 \cdot (x_1 - x_2) + (x_1 + x_2)(x_1 - x_2)|}{|x_1+1| \cdot |x_2+1|}$$

$$= \frac{|x_1 x_2 + x_1 + x_2|}{|x_1+1| \cdot |x_2+1|} \cdot |x_1 - x_2|$$

$$\leq \frac{|x_1 x_2| + |x_1| + |x_2|}{|x_1+1| \cdot |x_2+1|} \cdot |x_1 - x_2|$$

$$\leq \frac{1 \cdot 1 + 1 + 1}{10+1 \cdot 10+1} \cdot |x_1 - x_2| = 3 \cdot |x_1 - x_2|$$

$$\therefore Lf = \underline{\underline{3}}$$

* Uppgift med Lipschitz och M_f, M_g

$$L_f = 3, L_g = 5, I = [0, 7]$$

f och g står varandra i $(1, 2)$

Bestäm Lipschitz-konstant för fg .

$$L_{fg} = L_f M_g + M_f L_g$$

Notera:

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f(x) - f(1) + f(1)| \\ &\leq |f(x) - f(1)| + |f(1)| \end{aligned}$$

$$\leq L_f \cdot |x - 1| + 2$$

$$\leq 3 \cdot |7 - 1| + 2 = 20 = M_f$$

p.s.s.

$$|g(x)| \leq L_g \cdot |x - 1| + 2$$

$$\leq 5 \cdot 6 + 2 = 32$$

$$\Rightarrow L_{fg} = 3 \cdot 32 + 20 \cdot 5 = \underline{\underline{196}}$$

* Tenta 2014-08-27, uppgift 9

Maclaurin för $\sin(x^2)$:

Som tidigare:

$$\sin(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (x^2)^{2n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{4n+2}$$

* Tenta 2015-01-05, uppgift 7 (frågor)

Maclaurin för $1/(1-x^{10})$

$$1/(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$1/(1-x^{10}) = \sum_{n=0}^{\infty} (x^{10})^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^{10n}$$

* Hur man vet att en talföljd är absolutkonvergent? $\uparrow$ (sic) serie

Svar: Om serien med belopp är konvergent

* Exempel på konvergenstest och vilka test som är viktigast

Tips: Börja med kvottest för att undersöka absolutkonvergens

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3n+1}{n^2+5} = a_n$$

$$\begin{aligned} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \frac{3(n+1)+1}{(n+1)^2+5} \cdot \frac{3n+1}{n^2+5} \\ &= \frac{3(n+1)+1}{(n+1)^2+5} \cdot \frac{3n+1}{3n+1} \end{aligned}$$

→ 1 = 9 då $n \rightarrow \infty$

⇒ Antingen konvergent eller divergent

Men: Uppfyller de tre kraven för alternerande test ⇒ Villkorligt konvergent

Använd jämförelsetest II med geometrisk serie: $b_n = 1/n$.
 $\frac{|a_n|}{b_n} = \frac{3n+1}{n^2+5} \cdot \frac{1}{1/n} = \frac{n \cdot (3n+1)}{n^2+5}$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot (3n+1)}{n^2+5} = 3 = L < \infty \Rightarrow$ divergent ty geometrisk serie är divergent.

* Olikheter med absolutbelopp

$$|x + 10110_2| < |x - 1011_2|$$

$$10110_2 = 16 + 4 + 2 = 22$$

$$1011_2 = 8 + 2 + 1 = 11$$

$$|x + 22| < |x - 11|$$

Rita tallinge!

$$\begin{array}{rcl} -x-22 < 11-x & x+22 < 11-x & x+22 < x-11 \\ \hline x & x & x \\ -22 & 11 & 11 \end{array}$$

Fall 1: $x < -22$

$$x-22 < 11-x$$

$$-22 < 11 \text{ oh!}$$

Fall 2: $-22 \leq x < 11$

$$x+22 < 11-x$$

$$2x < -11$$

$$x < -11/2 \Rightarrow -22 \leq x < -11/2$$

Fall 3: $x + 22 < x - 11$
 $22 < -11 \quad \underline{\underline{\text{S}}}$

$\therefore$ Svar: $\underline{\underline{x < -11/2}}$