

* Idag: Tentaräkning

Frågestund

F22

* Exempel-tenta (se separat dokument)

Notera: Endast svar på uppg. 1-10

1. $x^3 > 4x$

Två fall: $x < 0, x > 0, (x \neq 0)$ Fall 1: $x < 0$

$x^3 > 4x$

$x^2 < 4$

$|x| < 2, \text{ men } x < 0$

$\Rightarrow -2 < x < 0$

Fall 2: $x > 0$

$x^3 > 4x$

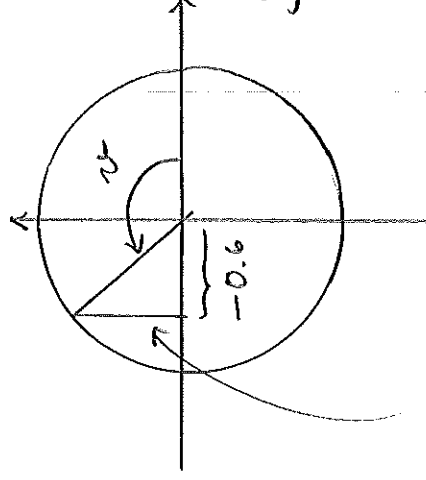
$x^2 > 4$

$|x| > 2, \text{ men } x > 0$

$\Rightarrow x > 2 \quad \therefore \text{Svar: } \underline{\underline{-2 < x < 0 \vee x > 2}}$

2. $\tan(\cos^{-1}(-0.6)) = ?$

$$\tan v = \frac{0.8}{-0.6} = \underline{\underline{-\frac{4}{3}}}$$



Svar: $\underline{\underline{-4/3}}$

$$\sqrt{1-0.6^2} = \sqrt{1-0.36} = \sqrt{0.64} = 0.8$$

3. $f(x) = \sqrt{x}, \quad I = [1, 2]$

$$Lf = \max_I |f'(x)| = \max_I \frac{1/2}{\sqrt{x}} = \frac{1/2}{1} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Svar: $\underline{\underline{Lf = \frac{1}{2}}}$

4. function $y = \text{myabs}(x)$

if $x \geq 0$ $y = x;$

else

 $y = -x;$

end

$$5. f(x) = x^3 + x - 9$$

$$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 1$$

$$y = 1 \Leftrightarrow x^3 + x - 9 = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{3 \cdot 2^2 + 1} = \frac{1}{13}$$

$$\text{Svar: } \underline{\underline{1/13}}$$

$$6. f(x) = 2^{(x+1)(x-1)}$$

$$= \exp(\ln 2 \cdot (x+1)(x-1))$$

$$\Rightarrow f'(x) = \exp(\ln 2 \cdot (x+1)(x-1)) \cdot$$

$$\cdot \ln 2 \cdot (x-x+1+x)$$

$$= \frac{2x \ln 2 \cdot 2^{(x+1)(x-1)}}{}$$

$$(\text{Kan förenklas ytterligare: } x \cdot \ln 2 \cdot 2^{x^2})$$

$$^{(x+1)(x-1)}$$

$$\text{Svar: } \underline{\underline{2x \ln 2 \cdot 2^{(x+1)(x-1)}}}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - \tan x} \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{1 - \frac{1}{\cos^2 x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \cos^3 x}{\cos^2 x - 1}$$

$$\stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x \cdot (-\sin x) - 3 \cos^2 x \cdot (-\sin x)}{2 \cos x \cdot (-\sin x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x - 3 \cos^2 x}{2 \cos x} = \frac{2-3}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Svar: } \underline{\underline{-1/2}}$$

$$8. f(x) = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2 \cos 2x$$

$$\Rightarrow f''(x) = -4 \sin 2x$$

$$\Rightarrow P_2(x) = \sin 2 + 2 \cos 2 \cdot (x-1) - \frac{1}{2} \cdot 4 \sin 2 \cdot (x-1)^2$$

$$\Rightarrow P_2(2) = \sin 2 + 2 \cos 2 - 2 \sin 2 = \underline{\underline{2 \cos 2 - \sin 2}}$$

$$\text{Svar: } \underline{\underline{2 \cos 2 - \sin 2}}$$

$$\begin{aligned}
 9. \quad & \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^3}{2 \cdot 3!} + \frac{\pi^5}{2^2 \cdot 5!} - \dots \\
 &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{1}{5!} \left(\frac{\pi}{4}\right)^5 - \dots \\
 &= \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

Svar: $\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$10. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x+2}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n 2^n}}_{=a_n} \cdot (x+2)^n$$

Kvottest för potensserier:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1/(n+1) \cdot 2^{n+1}}{1/(n \cdot 2^n)} =$$

$$= \frac{n \cdot 2^n}{(n+1) \cdot 2^{n+1}} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} = L$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{L} = \underline{2}$$

Svar: $R=2$ 11. Program $x = 1;$ $\text{tol} = 1e^{-10};$ $dx = 1.5;$ while $\text{abs}(dx) > \text{tol}$ $dx = -(x^2 - 2) / 2x; \% \text{Newton}$ $x = x + dx;$

end

Beris:

$$g(x) = x - \frac{x^2 - 2}{2x} = \frac{2x^2 - x^2 + 2}{2x} = \frac{x^2 + 2}{2x} = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow |g'(x)| < 1 \quad \text{för} \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} > -1 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} < \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow |x| > \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow |g'(x)| < 1 \quad \text{för} \quad x > 1.$$

Tag $I = [1, 2]$. Måste visa att $g: I \rightarrow I$,

$$\text{dvs } x \in I \Rightarrow g(x) \in I.$$

Undersök ändpunkterna $x=1$, $x=2$ samt kritisk punkt $x=\sqrt{2}$:

$$g(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{1} = 1.5 \in I$$

$$g(2) = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = 1.5 \in I$$

$$g(\sqrt{2}) = \sqrt{2} \in I$$

$$\Rightarrow g: I \rightarrow I \text{ och } |g'(x)| \leq \frac{1}{2} < 1 \text{ på } I.$$

$\Rightarrow g$ kontraktion på I .

$\Rightarrow$ Iterationen konvergerar mot fixpunkten $x=\sqrt{2}$ enligt Banachs fixpunktsats.

12. Se föreläsning F22!

13. $f(x) = x^\alpha$, $x \in [\varepsilon, 1]$

$$\alpha, \varepsilon \in (0, 1)$$

$$f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1} > 0$$

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} < 0$$

$\Rightarrow$ Maximum för $|f'(x)|$ antas i vänster ändpunkt $x=\varepsilon$.

$$\Rightarrow L_f = \max_{[\varepsilon, 1]} |f'| = \alpha \varepsilon^{\alpha-1} < \infty$$

enligt medelvärdesatsen.

$\Rightarrow$ Funktionen f är Lipschitz-kontinuerlig på $I = [\varepsilon, 1]$.

$$14. f(x) = \sin(\ln(x))$$

$$f'(x) = \frac{\cos(\ln x)}{x}$$

$$f''(x) = \frac{-\sin(\ln x) \cdot \frac{1}{x} \cdot x - \cos(\ln x) \cdot 1}{x^2}$$

$$= - \frac{\sin(\ln x) + \cos(\ln x)}{x^2}$$

Inflexionspunkt då $f''(x) = 0$:

$$\sin(\underbrace{\ln x}_y) = -\cos(\underbrace{\ln x}_y)$$

$$\sin y = -\cos y$$

$$y = \frac{3\pi}{2} + n \cdot \pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\ln x = \frac{3\pi}{2} + n \cdot \pi$$

$$\frac{3\pi}{2} + \pi \cdot n$$

$$x = e$$

Svar: Öändligt många inflexionspunkter
 i $x = e^{\frac{3\pi}{2} + \pi n}, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Lösning av några utvalda uppgifter
(efter förslag från klassen):

* Örning 5 (bevislista): Cauchy

Visa att om $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = \bar{x}$ så är $\{x_i\}$
en Cauchy-följd.

Betrakta $|x_i - x_j|$:

$$|x_i - x_j| = |x_i - \bar{x} + \bar{x} - x_j|$$

$$\leq |x_i - \bar{x}| + |\bar{x} - x_j| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

om $i, j \geq N$ och N väljs så att

$$|x_i - \bar{x}| < \varepsilon \text{ för } i \geq N,$$

vilket är möjligt, då $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = \bar{x}$.

* Adams 4.10.9 (error bounds Taylor)
Beräkna feluppskattning för $P_2(9)$
för $f(x) = x^{1/3}$ och $\bar{x} = 8$.

$$f(x) = x^{1/3} \quad f(8) = 2$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} x^{-2/3} \quad f'(8) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8^{-2/3}} = \frac{1}{12}$$

$$f''(x) = -\frac{2}{9} x^{-5/3} \quad f''(8) = -\frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8^{-5/3}} = -\frac{1}{144}$$

$$f'''(x) = \frac{10}{27} x^{-8/3}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P_2(9) &= 2 + \frac{1}{12} \cdot (9-8) + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{144}\right) \cdot (9-8)^2 \\ &= 2 + \frac{1}{12} - \frac{1}{288} = 2 \frac{23}{288} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 9^{1/3} &= 2 \frac{23}{288} + \frac{1}{6^3} \cdot \frac{16}{27} \xi^{-8/3} \cdot (9-8)^3 \\ &= 2 \frac{23}{288} + \frac{5}{81} \xi^{-8/3}, \quad \xi \in (8, 9) \end{aligned}$$

$$\xi^{-8/3} \in \left(9^{-8/3}, 8^{-8/3}\right) = \left(9^{-8/3}, \frac{1}{256}\right)$$

Eukel uppskattning:

$$\xi^{-8/3} \in (0, \frac{1}{256})$$

(Notera: Den (över-)ambitiöse kan också göra en skarpere uppskattning genom att bestämma en under begränsning för $9^{-8/3}$ baserat på uttrycket för $9^{1/3}$.)

Svar:

$$\underline{\underline{9^{1/3} \in (2 \frac{23}{288}, 2 \frac{23}{288} + \frac{5}{81256})}}}$$

* Duggans Maclaurin-uppgift

Kan ej räkna den ifall någon vill lämna in lösning!

* Hitta bästa Lipschitz-konstant

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad I = [1, 2]$$

Exempel 1:

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}|$$

$$= \left| \frac{(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \cdot |x_1 - x_2|$$

Måste gälla på hela intervallet!
Bli'r som störst (värst) då $x_1 = x_2 = 1$

$$\Rightarrow Lf = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$

(Samma svar om vi deriverar och bestämmer $\max |f'|$.)

Exempel 2:

$$f(x) = \frac{1}{x+1}, \quad I = [1, 2]$$

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left| \frac{1}{x_1+1} - \frac{1}{x_2+1} \right|$$

$$= \frac{|x_2 + x_1 - (x_1 + x_2)|}{(x_1+1)(x_2+1)} = \frac{1}{(x_1+1)(x_2+1)} \cdot |x_1 - x_2| \quad (*)$$

$$\leq \frac{1}{x_1 x_2} \cdot |x_1 - x_2| \leq \frac{1}{1 \cdot 1} \cdot |x_1 - x_2|$$

Worst case: $x_1 = x_2 = 1$

$\Rightarrow Lf = 1$ är en Lipschitz-konstant

Men är det den bästa?

Nej! Ty om vi går tillbaka till (*)

kan vi göra den skarpare uppskattningen

$$\frac{1}{(x_1+1)(x_2+1)} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$\Rightarrow Lf = \frac{1}{4}$ är en bättre = mindre

Lipschitz-konstant!

Samma sak med derivata:

$$f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow |f'(x)| \leq \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4}$$

* "Något med summor" / jämförelsetest

Adams 9.3.6

$$\sum_{n=8}^{\infty} \frac{1}{n^{n+5}}$$

$$0 \leq a_n = \frac{1}{n^{n+5}} \leq \frac{1}{n^n} = \left(\frac{1}{n}\right)^n = b_n$$

$\sum b_n$ geometrisk serie

med $r = \frac{1}{n} < 1 \Rightarrow$ konvergerar

Jämförelsetest I $\Rightarrow \sum a_n$ konvergerar.

* Kvadratisk konvergens

Newton konvergerar kvadratisk:

$$|e_n| \leq C \cdot |e_{n-1}|^2$$

för någon konstant $C > 0$

$$\begin{cases} e_n = x_n - \bar{x} \\ e_{n-1} = x_{n-1} - \bar{x} \end{cases}$$

* Derivata av komplicerad funktion som innehåller absolutbelopp

$$f(x) = e^{|\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}|} / \tan(\ln x)$$

Fall 1: $\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}} \geq 0$

$$\Leftrightarrow \sin x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow x \in [\pi/4 + 2\pi n, 3\pi/4 + 2\pi n] \\ n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}} / \tan(\ln x) \\ \Rightarrow f'(x) &= \frac{e^{\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot \cos x \cdot \tan \ln x - e^{\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \ln x} \cdot \frac{1}{x}}{\tan^2 \ln x} \\ &= \frac{e^{\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot (x \cos^2 \ln x \cdot \cos x \cdot \tan \ln x - 1)}{\tan^2 \ln x \cdot x \cos^2 \ln x} \\ &= \frac{e^{\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot (x \cos x \cdot \sin \ln x \cdot \cos \ln x - 1)}{x \cdot \sin^2 \ln x} \end{aligned}$$

Fall 2: Behandlas på motsvarande sätt

* Uppgift 46, Övningslista 2012-01-14

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\sin(3x)}$$

Använd Taylors formel:

$$e^{2x} - 1 = 1 + 2x + O(x^2) - 1 = 2x + O(x^2)$$

$$\sin(3x) = 3x + O(x^3)$$

$$\Rightarrow \frac{e^{2x} - 1}{\sin 3x} = \frac{2x + O(x^2)}{3x + O(x^3)}$$

$$= \frac{2 + O(x)}{3 + O(x^2)} \rightarrow \frac{2}{3} =$$

då $x \rightarrow 0$.

* Övning 11 (bevislöst)

$$x^4 = 16$$

$$x = g(x) = x + \alpha \cdot (x^4 - 16)$$

Experimentera numeriskt:

$$\alpha = -0.01 \quad \underline{\underline{\text{funkar bra.}}}$$

Alternativ: Använd Newtons metod, ger

$$\alpha = -\frac{1}{4} \quad \alpha(x) = -\frac{1}{4x^3}$$

Indikerar att

$$\alpha = -1/32 = -0.03125$$

är ett bra val.

* Övning 13:

Per definition:

$$\underbrace{(b-1)(b-1) \dots (b-1)}_{n \text{ siffror}} = \sum_{k=0}^{n-1} (b-1) \cdot b^k$$

$$= (b-1) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} b^k = \{\text{geometrisk summa}\}$$

$$= (b-1) \cdot \frac{1-b^n}{1-b} = b^n - 1.$$

Exempel:

$$999_{10} = 1000 - 1 = 10^3 - 1$$

$$11111111_2 = 256 - 1 = 2^8 - 1$$

* Övning 15:

$$f(x) = x^2$$

$$f: X \rightarrow Y$$

(i) $X = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}$

ej surjektiv, t.ex. $-1 \in Y$ men $-1 \notin \mathbb{R}(f)$

ej injektiv, t.ex. $-1, 1 \in X$ och $f(1) = f(-1)$

(ii) $X = \mathbb{R}, Y = [0, \infty)$

surjektiv, t.ex. $\forall y \in Y \exists x \in X: f(x) = y$ ($x = \sqrt{y}$)

ej injektiv på samma sätt som i (i)

(iii) $X = [0, \infty), Y = \mathbb{R}$

ej surjektiv på samma sätt som i (i)

injektiv, t.ex. strängt växande på X

(iv) $X = [0, \infty), Y = [0, \infty)$

surjektiv och injektiv på samma sätt som i (ii) resp. (iii)

$\Rightarrow$ bijektiv och därmed existerar inversen f^{-1} .

* Adams/Essex 9.2.11 (9.2.13)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots$$

$$a_n = \frac{1}{n \cdot (n+2)} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) / 2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2S_n &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) \\ &+ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) + \dots \\ &\dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \end{aligned}$$

$$\rightarrow 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad \text{då } n \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow S_n \rightarrow \frac{3}{4}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{3}{4}$$

Lycka
till!
tenta!

på
 Anders

P.S. När ni lärt er att
integrera i läsperiod II, så
missa inte att lära er att lösa
den klassiska Chalmersintegralen!

$$\int \sqrt{1-x^2} dx$$

(Ett mycket uppskattat partytrick! :-)