* Idag: Lösning av exempel (+Repetition)

$\boxed{F\ 1.5}$

* Visa att — triangelolikheten

$$|x \pm y| \le |x| + |y| \quad (i)$$

$$\big||x| - |y|\big| \le |x \pm y| \quad (ii)$$

(i) Kvadrera!

$$|x \pm y|^2 \le (|x| + |y|)^2 \quad (i')$$

$$\Leftrightarrow (x \pm y)^2 \le |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y|$$

$$\Leftrightarrow \cancel{x^2} + \cancel{y^2} \pm 2xy \le \cancel{x^2} + \cancel{y^2} + 2|x||y|$$

$$\Leftrightarrow \pm \cancel{2}xy \le \cancel{2}|x||y|$$

$$\Leftrightarrow \pm xy \le |x| \cdot |y| \quad \text{ok!}$$

$\therefore$ (i') är sann

$\Rightarrow$ (i) sann?

Ja, ty VL ≥ 0 och HL ≥ 0.

(Notera: $(1)^2 \le (-2)^2$ ok

$1 \le -2$ ↯)

(ii) Kvadrera igen!

$$(ii) \Leftrightarrow |x|^2 + |y|^2 - 2|x||y| \le (x \pm y)^2$$

$$\Leftrightarrow \cancel{x^2} + \cancel{y^2} - \cancel{2}|x||y| \le \cancel{x^2} + \cancel{y^2} \pm \cancel{2}xy$$

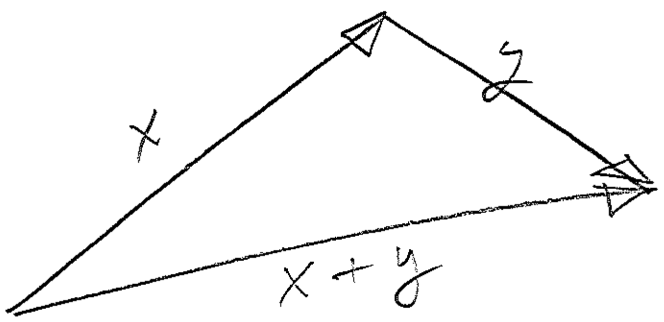
$$-|x||y| \le xy \quad \text{ok!}$$

V.S.V.

Q.E.D.

■

* Notera: Triangelolikheten gäller på alla "normerade vektorrum", tex. $\mathbb{R}^2$:



$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Mer om detta i linjär algebra i läsperiod 3!

* Visa att

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b \quad (a, b > 0)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$e^A \cdot e^B = e^{A+B} \quad (A, B \in \mathbb{R})$$

$\Rightarrow$) Antag:

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

$\forall a, b > 0$

"för alla"

Givet $A, B \in \mathbb{R}$, låt $a = \underbrace{e^A}_{>0}$, $b = \underbrace{e^B}_{>0}$

$$\Rightarrow \ln(e^A \cdot e^B) = \ln(ab)$$

$$= \ln a + \ln b = A + B$$

$$\Rightarrow e^{\ln(e^A \cdot e^B)} = e^{A+B}$$

$$\Leftrightarrow \quad e^A \cdot e^B = e^{A+B}.$$

På samma sätt visas att

$$e^A / e^B = e^{A-B}$$

$$(e^A)^p = e^{Ap}$$

* Visa att för aritmetisk summa gäller:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} \qquad (*)$$

Vi använder matematisk induktion.

Om $\underline{n = 1}$:

$$VL = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{1} a_k = a_1 = a_n$$

$$HL = n \cdot \frac{a_1 + a_2}{2} = 1 \cdot \frac{a_1 + a_1}{2} = a_1$$

$\underline{\underline{\text{OK}}}$

Om formeln $(*)$ gäller för $n = \bar{n}$ har vi

$$\sum_{k=1}^{\bar{n}} a_k = \bar{n} \cdot \frac{a_1 + a_{\bar{n}}}{2}$$

Då gäller för $n = \bar{n} + 1$:

$$\sum_{k=1}^{\bar{n}+1} a_k = \left(\sum_{k=1}^{\bar{n}} a_k\right) + a_{\bar{n}+1}$$

$$= \bar{n} \cdot \frac{a_1 + a_{\bar{n}}}{2} + a_{\bar{n}+1}$$

$$= (\bar{n}+1) \cdot \frac{a_1 + a_{\bar{n}+1}}{2}, \quad \text{t.y.}$$

$$\bar{n} \cdot \frac{a_1 + a_{\bar{n}}}{2} + a_{\bar{n}+1} = (\bar{n}+1) \cdot \frac{a_1 + a_{\bar{n}+1}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cancel{\bar{n}a_1} + \bar{n}a_{\bar{n}} + \cancel{2}a_{\bar{n}+1} = \cancel{\bar{n}a_1} + \bar{n}a_{\bar{n}+1} + a_1 + \cancel{a_{\bar{n}+1}}$$

$$\Leftrightarrow \bar{n}a_{\bar{n}} + a_{\bar{n}+1} = \bar{n}a_{\bar{n}+1} + a_1$$

$$\Leftrightarrow a_{\bar{n}+1} - a_1 = \bar{n} \cdot \underbrace{(a_{\bar{n}+1} - a_{\bar{n}})}_{=c}$$

$$\Leftrightarrow a_{\bar{n}+1} - a_1 = \bar{n} \cdot c \quad \underline{\underline{\text{ok}}}$$

V.S.V.

* Visa att ett tal är delbart med 3 omm siffersumman är delbar med 3!

"om och endast om"

Exempel: $x = 5385$ är delbart med 3, ty

$5+3+8+5 = 21$ och $21/3 = 7$.

I allmänhet:

$$x = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot 10^k, \quad 0 \le a_k \le 9$$

Siffersumma:

$$y = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

Vi noterar att

$$x = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot 10^k = \sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot (10^k - 1) =$$

$$= y + \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \underbrace{999\ldots9}_{k \text{ siffror}}$$

← Delbart med 9 och därmed med 3. (Så samma slutsats gäller för delbarhet med

$$\therefore \begin{cases} x = y + 3m \\ y = x - 3m \end{cases}$$

heltal

$\Rightarrow$ x delbart med 3

$\Leftrightarrow$

y delbart med 3