MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Anders Logg

TMV225 2016
Läsvecka 3

TMV225 Inledande matematik M

Veckoprogram för läsvecka 3

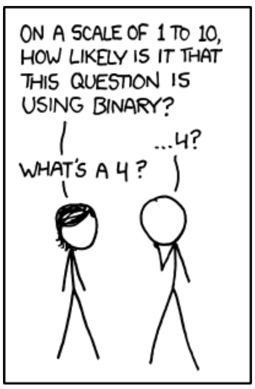
Efter att ha studerat konvergens, gränsvärden och kontinuitet fortsätter vi denna vecka vår resa i den matematiska analysen och träffar på derivatan. Vi arbetar vidare i Adams med kapitel två: derivatans definition, derivator av trigonometriska funktioner, medelvärdessatsen och linjärisering.

Notera att veckans datoruppgifter finns med i detta veckoprogram!

Vi ses på föreläsningarna!
Anders

Föreläsningar	**Avsnitt**[1]	**Innehåll**
F06	(A.2.1), A.2.2–4	Derivator, deriveringsregler
F07	A.2.5–6, A.2.9	Derivator av trig. funktioner, högre derivator, implicit derivering
F08	A.2.8	Medelvärdessatsen, linjärisering

Övningar	**Uppgifter**[2]
Ö06	A.2.2.17, A.2.3.10, A.2.4.24
	A.2.1.{5, 7, 9}
	A.2.2.{6, 13, 25, 34, 35, 38, 40, 44}
	A.2.3.{7, 13, 17, 21, 23, 25, 33, 35, 39, 51}
	A.2.4.{3, 5, 7, 9, 23, 25, 33, 37}
Ö07	A.2.5.45, A.2.6.13, A.2.9.11
	A.2.5.{3, 5, 7, 9, 11, 13, 31, 35, 39, 41, 43, 49, 53, 57}
	A.2.6.{1, 3, 5, 9, 19}
	A.2.9.{1, 3, 7, 9}
	A.2.8.{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15}
Ö08	Datorövning 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5



`http://xkcd.com/`

[1] AE = Adams/Essex, AL = Anteckningar i inledande matematik, RP = Pettersson, JM = Madjarova
[2] Understrukna uppgifter = extra viktiga, alternativt demonstreras av övningsledare.

Datorövningar läsvecka 3

Datorövning 3.1 Skriv en funktion `D_h(f,x,h)` som approximerar derivatan av en funktion f i en punkt x genom att beräkna den ensidiga differenskvoten $D_h f(x) = (f(x+h) - f(x))/h$.
■

Datorövning 3.2 Skriv en funktion `S_h(f,x,h)` som approximerar derivatan av en funktion f i en punkt x genom att beräkna den symmetriska differenskvoten $S_h f(x) = (f(x+h) - f(x-h))/(2h)$. ■

Datorövning 3.3 Skriv ett program som beräknar och plottar felen $E(h) = |f'(x) - D_h f(x)|$ och $F(h) = |f'(x) - S_h f(x)|$ för $h = 0.1, 0.01, 0.001, \ldots, 1 \times 10^{-16}$ för $f(x) = \sin(\cos(x))$ i punkten $x = 5$. Använd en logaritmisk plot och använd funktionerna `D_h` och `S_h` från föregående uppgifter. Vilka h är optimala för den ensidiga respektive symmetriska differenskvoten? *Ledning:* Använd funktionerna `loglog` och `logspace`. ■

Datorövning 3.4 Utvidga ditt program från föregående uppgift till att bestämma lutningen för kurvorna $\ln E(h)$ och $\ln F(h)$ som funktion av $\ln h$ i området $1 \times 10^{-5} \leq h \leq 0.1$. Vilken slutsats kan du dra om hur $E(h)$ och $F(h)$ beror på h? *Ledning:* Använd funktionen `polyfit`.
■

Datorövning 3.5 Skriv ett program som plottar funktionen $f(x) = \sin(x)/x$ på intervallet $[-25, 25]$ för $x \neq 0$. Skriv också ut en tabell över funktionsvärdena $(f(x_n))_{n=0}^{16}$ för $x_n = 10^{-n}$.
■

Facit

D3.1

Python code

```python
def D_h(f, x, h):
    return (f(x + h) - f(x)) / h
```

MATLAB code

```matlab
function y = D_h(f, x, h)
  y = (f(x + h) - f(x)) / h
end
```

D3.2

Python code

```python
def S_h(f, x, h):
    return (f(x + h) - f(x - h)) / (2*h)
```

MATLAB code

```matlab
function y = S_h(f, x, h)
  y = (f(x + h) - f(x - h)) / (2*h)
end
```

D3.3

Python code

```python
from pylab import *

from D_h import *
from S_h import *

def f(x):
    return sin(cos(x))

def Df(x):
    return -sin(x)*cos(cos(x))

h = logspace(-1, -16, 16)
x = 5.0

E = abs(Df(x) - D_h(f, x, h))
F = abs(Df(x) - S_h(f, x, h))

figure()
loglog(h, E, 'go')
loglog(h, F, 'r^')
xlabel('h')
legend(['E(h)', 'F(h)'])
grid(True)

show()
```

MATLAB code

```matlab
f  = @(x) sin(cos(x));
Df = @(x) -sin(x)*cos(cos(x));

h = logspace(-1, -16, 16);
```

```
x = 5.0;

E = abs(Df(x) - D_h(f, x, h));
F = abs(Df(x) - S_h(f, x, h));

figure()
loglog(h, E, 'go')
hold on
loglog(h, F, 'r^')
xlabel('h')
legend('E(h)', 'F(h)')
grid on
```

Optimalt h för ensidiga differenskvoten D_h är $h = 1 \times 10^{-8}$ och optimalt h för symmetriska differenskvoten S_h är $h = 1 \times 10^{-5}$ *i det här specifika fallet*.

D3.4

Python code

```
from pylab import *

from D_h import *
from S_h import *

def f(x):
    return sin(cos(x))

def Df(x):
    return -sin(x)*cos(cos(x))

h = logspace(-1, -16, 16)
x = 5.0

E = abs(Df(x) - D_h(f, x, h))
F = abs(Df(x) - S_h(f, x, h))

pE = polyfit(log(h[:5]), log(E[:5]), 1)
pF = polyfit(log(h[:5]), log(F[:5]), 1)

figure()
loglog(h, E, 'go')
loglog(h, F, 'r^')
loglog(h[:5], exp(pE[1])*h[:5]**pE[0], 'g--')
loglog(h[:5], exp(pF[1])*h[:5]**pF[0], 'r--')
xlabel('h')
legend(['E(h): p = %.2f' % pE[0],
        'F(h): p = %.2f' % pF[0]])
grid(True)

show()
```

MATLAB code

```
f  = @(x) sin(cos(x));
Df = @(x) -sin(x)*cos(cos(x));

h = logspace(-1, -16, 16);
x = 5.0;

E = abs(Df(x) - D_h(f, x, h));
```

```
F = abs(Df(x) - S_h(f, x, h));

pE = polyfit(log(h(1:5)), log(E(1:5)), 1);
pF = polyfit(log(h(1:5)), log(F(1:5)), 1);

figure()
loglog(h, E, 'go')
hold on
loglog(h, F, 'r^')
loglog(h(1:5), exp(pE(2))*h(1:5).^pE(1), 'g--')
loglog(h(1:5), exp(pF(2))*h(1:5).^pF(1), 'r--')
xlabel('h')
legend(['E(h):␣p␣=␣' num2str(pE(1))], ['F(h):␣p␣=␣' num2str(pF(1))])
grid on
```

Den ensidiga differenskvoten D_h är en *första ordningens metod*, dvs $E(h) \sim Ch^1$.

Den symmetriska differenskvoten S_h är en *andra ordningens metod*, dvs $F(h) \sim Ch^2$.

D3.5

Python code

```
from pylab import *

x = linspace(-25, 25, 1000)
y = sin(x) / x

figure()
plot(x, y)
xlabel('x')
ylabel('sin(x) / x')
grid(True)

set_printoptions(16)
h = logspace(-1, -16, 16)
print sin(h) / h

show()
```

MATLAB code

```
x = linspace(-25, 25, 1000);
y = sin(x) ./ x;

figure()
plot(x, y)
xlabel('x')
ylabel('sin(x)␣/␣x')
grid on

format long
h = logspace(-1, -16, 16);
sin(h) ./ h
```