

TMV225 Inledande matematik M

Veckoprogram för läsvecka 4

Denna vecka kommer vi först att definiera och studera de viktiga funktionerna $\ln$ och $\exp$. Därefter fortsätter vi med vårt studie av derivator och ser hur de kan användas för att beräkna extremvärden och gränsvärden. Vi kommer också att lära oss Taylors formel som en generalisering av linjärisering för approximation av funktioner.

Denna vecka kommer också den andra duggan som genomförs i Maple TA. Ta chansen att samla värdefulla bonuspoäng. Två poäng står på spel den här veckan och kan komma till god användning på tentan om några veckor!

Vi ses på föreläsningarna!

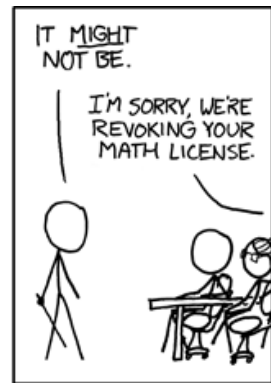
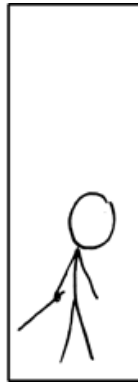
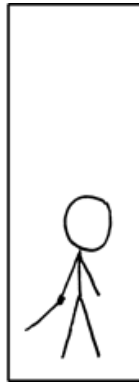
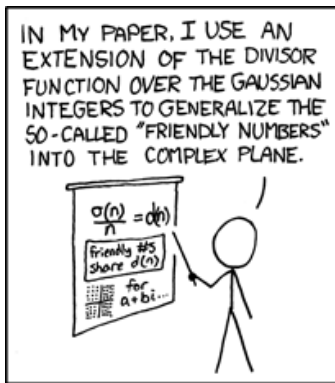
Anders

Föreläsningar	Avsnitt ¹	Innehåll
F09	A.3.1–5	Inversa funktioner, $\exp(x)$, $\ln x$, $\arcsin x$, ...
F10	A.4.1, A.4.3–5	Relaterade hastigheter, l'Hôpital, extremvärden
F11	A.4.8, A.4.10	Extremvärdesproblem, Taylors formel

Övningar	Uppgifter ²
Ö09	A.3.1.{7, 8, 11, 13, 14, 20, 28} A.3.2.{1, 2, 5, 6, 7, 10, 26} A.3.3.33, A.3.5.{15, 31} A.3.3.{7, 8, 12, 17, 18, 21, 22, 28} A.3.4.{9, 10, 12, 14} A.3.5.{2, 3, 6, 8, 13, 14, 19, 20, 23, 27, 28}
Ö10	A.4.9.21, A.4.1.1, A.4.3.2 A.4.9.{1, 3, 7, 11, 13, 15, 17, 23} A.4.1.{8, 16, 26} A.4.2.{20, 21, 22} A.4.3.{1, 3, 9, 11, 13, 15, 17, 19} A.4.4.18, A.4.5.15, A.4.8.17 A.4.4.{2, 4, 6, 13, 24, 26, 27} A.4.5.{4, 10, 16, 24, 30, 32} A.4.8.{10, 18, 20, 21} A.4.10.{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 31}
Ö11	Datorövning 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5

¹AE = Adams/Essex, AL = Anteckningar i inledande matematik, RP = Pettersson, JM = Madjarova

²Understrukna uppgifter = extra viktiga, alternativt demonstreras av övningsledare.



<http://xkcd.com/>

Datorövningar läsvecka 4

Datorövning 4.1 Skriv ett program som beräknar $\ln(10)$ utifrån definitionen av den naturliga logaritmen. Jämför värdet med det “exakta” värdet (som ges av funktionen $\log(10)$).

Ledning: Dela in intervallet $[1, 10]$ i N intervall och approximerare arean under kurvan med N st lådor med basen $h = (10 - 1)/N$ och höjden $y_n = 1/x_n = 1/(1 + hn)$ för $n = 1, 2, 3, \dots, N$. Hur stort behöver N vara för att ge fem korrekta decimaler? ■

Datorövning 4.2 Skriv ett program som beräknar $e = \exp(1)$ från gränsvärdet $\exp(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} (1 + x/N)^N$ genom att beräkna värdet för $N = 1, 2, 3, \dots, 1 \times 10^5$. Jämför värdet med det “exakta” värdet (som ges av funktionen $\exp(1)$) ■

Datorövning 4.3 Bestäm gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(\pi x)/x$ numeriskt genom att plotta kvoten $f(x)/g(x)$ då $x \rightarrow 0$. Plotta också kvoten $f'(x)/g'(x)$. Jämför med l'Hôpitals regel.

Ledning: Låt $x = 0.1, 0.01, 0.001, \dots, 1 \times 10^{-16}$ och använd funktionen `semilogx`. ■

Datorövning 4.4 Skriv ett program som beräknar största värdet av funktionen $f(x) = \sqrt{2} \exp(-(x - \pi)^2)$ genom att leta efter lösningen i “derivatans riktning”. Låt $x_0 = 1$ och beräkna därefter 100 iterationer enligt $x_n = x_{n-1} + \gamma f'(x_{n-1})$ där $\gamma > 0$. Notera att om derivatan är positiv så kommer vi att ta ett steg till höger, och omvänt om derivatan är negativ så tar vi ett steg till vänster. När vi närmar oss extrempunkten närmar sig derivatan noll och stegen blir mindre och mindre. Använd numerisk derivata (funktionen `D_h` från uppgift 3.1). Bestäm ett lämpligt värde på γ genom att pröva dig fram. ■

Datorövning 4.5 Skriv ett program som plottar funktionen $f(x) = \sin(x)$ på intervallet $[-10, 10]$ tillsammans med första, tredje, femte och sjunde ordningens Taylorutveckling $T_n f(x)$ runt $x = 0$. ■

Facit

D4.1

Python code

```
1 from math import log
2
3 N = 800000
4 h = (10.0 - 1.0) / N
5
6 area = 0.0
7 for n in range(1, N + 1):
8     x = 1.0 + n*h
9     y = 1.0 / x
10    area += h*y
11
12 print area, log(10)
```

MATLAB code

```
1 N = 800000;
2 h = (10.0 - 1.0) / N;
3
4 area = 0.0;
5 for n = 1:N
6     x = 1 + n*h;
7     y = 1 / x;
8     area = area + h*y;
9 end
10
11 format long
12 [area, log(10)]
```

Fem korrekta decimaler kräver (ca) $N = 800000$.

D4.2

Python code

```
1 from math import exp
2
3 for N in range(1, 1000001):
4     print (1 + 1.0/N)**N, exp(1)
```

MATLAB code

```
1 for N = 1:100000
2     [(1 + 1/N)^N, exp(1)]
3 end
```

D4.3

Python code

```
1 from pylab import *
2
3 x = logspace(-1, -16, 16)
4
5 semilogx(x, sin(pi*x) / x, 'g-o')
6 semilogx(x, pi*cos(pi*x), 'r-o')
7 xlabel('x')
8 grid(True)
9 show()
```

MATLAB code

```
1 x = logspace(-1, -16, 16);
2
3 clf
4 semilogx(x, sin(pi*x) ./ x, 'g-o')
5 hold on
6 semilogx(x, pi*cos(pi*x), 'r-o')
7 xlabel('x')
8 grid on
```

D4.4

Python code

```
1 from pylab import *
2 from D_h import *
3
4 def f(x):
5     return sqrt(2)*exp(-(x - pi)**2)
6
7 x = linspace(-10, 10, 1000)
8 plot(x, f(x))
9 xlabel('x')
10 ylabel('f(x)')
11 grid(True)
12
13 x = 1.0
14 h = 1e-8
15 gamma = 0.5
16
17 for n in range(100):
18     dfdx = D_h(f, x, h)
19     x += gamma*dfdx
20     print x, f(x)
21     plot(x, f(x), 'o')
22
23 show()
```

MATLAB code

```
1 f = @(x) sqrt(2)*exp(-(x - pi).^2);
2
3 x = linspace(-10, 10, 1000);
4 plot(x, f(x))
5 xlabel('x')
6 ylabel('f(x)')
7 grid on
8 hold on
9
10 x = 1.0;
11 h = 1e-8;
12 gamma = 0.5;
13
14 for n = 1:100
15     dfdx = D_h(f, x, h);
16     x = x + gamma*dfdx;
17     [x, f(x)]
18     plot(x, f(x), 'o')
19 end
```

D4.5

Python code

```
1 from pylab import *
2
3 x = linspace(-10, 10, 1000)
4
5 plot(x, sin(x))
6 plot(x, x, '--')
7 plot(x, x - x**3 / 6, '--')
8 plot(x, x - x**3 / 6 + x**5 / 120, '--')
9 plot(x, x - x**3 / 6 + x**5 / 120 - x**7 / 5040, '--')
10 xlabel('x')
11 grid(True)
12 axis([-10, 10, -2, 2])
13
14 show()
```

MATLAB code

```
1 x = linspace(-10, 10, 1000);
2
3 plot(x, sin(x))
4 hold on
5 plot(x, x, '--')
6 plot(x, x - x.^3 / 6, '--')
7 plot(x, x - x.^3 / 6 + x.^5 / 120, '--')
8 plot(x, x - x.^3 / 6 + x.^5 / 120 - x.^7 / 5040, '--')
9 xlabel('x')
10 grid on
11 axis([-10, 10, -2, 2])
```