* **Idag:** Medelvärdessatsen, linearisering

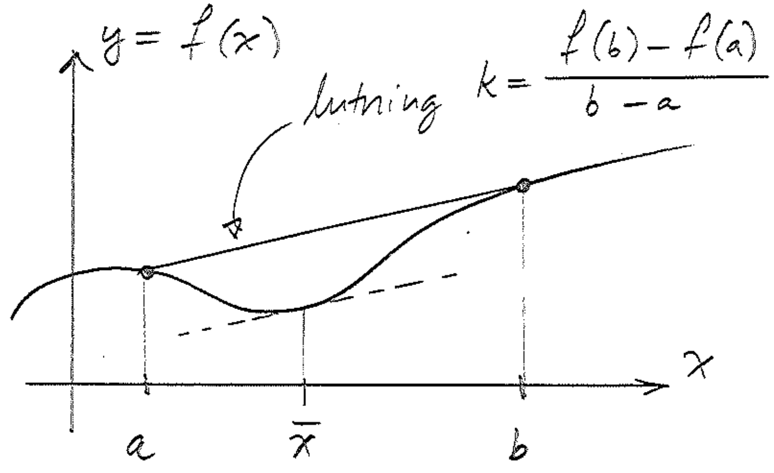
$\boxed{F12}$ (Kap 4)

* **Sats:** Medelvärdessatsen

Om funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig på det slutna begränsade intervallet $[a,b]$ och deriverbar på det öppna intervallet (a,b) så finns ett $\bar{x} \in (a,b)$ s.a.

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\bar{x}).$$

(Vi skall bevisa detta strax!)



måste finnas (minst) en punkt $\bar{x} \in (a,b)$ med exakt samma lutning som mellan $(a, f(a))$ och $(b, f(b))$

Exempel: $f(x) = Ax^2 + Bx + C$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{Ab^2+Bb+\cancel{C}-(Aa^2+Ba+\cancel{C})}{b-a}$$

$$= \frac{A(b^2-a^2)+B(b-a)}{b-a} = A(b+a)+B$$

$$f'(x) = 2Ax + B$$

Finn $\bar{x} \in (a, b)$ så att

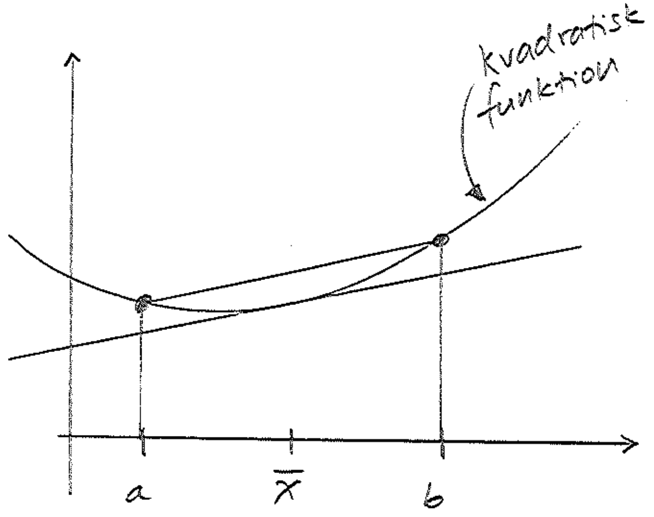
$$A \cdot (b+a) + \cancel{B} = 2A\bar{x} + \cancel{B}$$

(medelvärdessatsen säger att det finns)

$$\cancel{A}(b+a) = 2\cancel{A}\bar{x}$$

$$\bar{x} = \frac{a+b}{2}$$

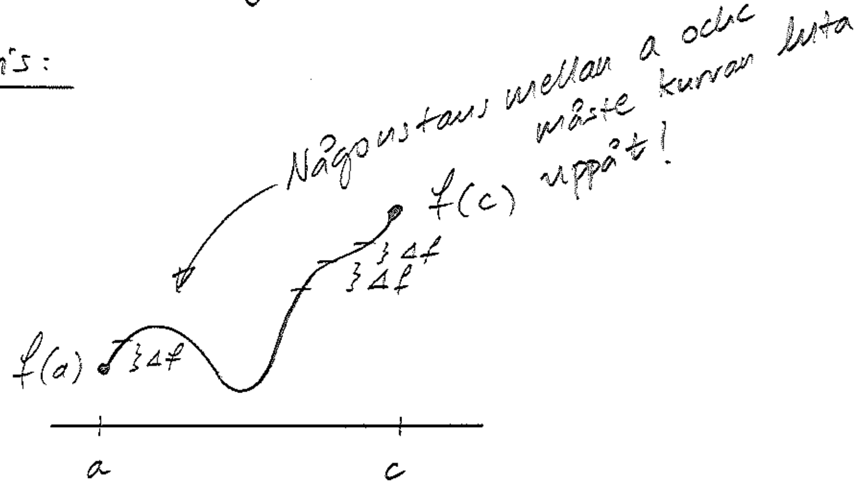
$\therefore$ Värdet antas i mittpunkten!



* Lemma: Om $f(a) < f(c)$ och f'

"hjälpsats" är Lipschitz-kontinuerlig på $[a, c]$ så måste $f'(\bar{a}) > 0$ i någon punkt $\bar{a} \in (a, c)$.

Bevis:



Alt 1: "Följer från figuren" (inget tillfredsställande bevis)

Alt 2: I läsperiod II skall vi visa att

$$f(c) = f(a) + \int_a f'(x)\,dx$$

vilket följer av att

$$f(c) = f(a) + \Delta f + \Delta f + \ldots$$

$$= f(a) + \frac{\Delta f}{\Delta x}\cdot\Delta x + \frac{\Delta f}{\Delta x}\cdot\Delta x + \frac{\Delta f}{\Delta x}\cdot\Delta x + \dots$$

$$\approx f(a) + f'\cdot\Delta x + f'\cdot\Delta x + f'\cdot\Delta x + \dots$$

$$\approx f(a) + \int_a^x f'(x)\,dx$$

Antag nu att $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a,b)$.

$$\Rightarrow f(c) = f(a) + \int_{a_b} \underbrace{f'(x)}_{\leq 0}\,dx$$

$$\leq f(a) + \int_a 0\,dx =$$

$$= f(a) + 0 = f(a)$$

$\therefore \quad f(c) \leq f(a)$

<u>Men:</u> $f(c) > f(a)$

$\Rightarrow$ Inte sant att $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a,c)$

$\Rightarrow \exists\, \bar{a} \in (a,c) : \quad f'(\bar{a}) > 0.$

$\blacksquare$

<u>Bevis:</u> (av medelvärdessatsen)

Vi kommer (i tillägg) att anta att f' är Lipschitz-kontinuerlig.

Bevisidé:

(i) Betrakta fallet $f(a) = f(b)$
(Rolles sats) och använd Bolzano

(ii) Utvidga till fallet $f(a) \neq f(b)$

(i) Antag $f(a) = f(b)$

Skall visa att $\exists\, \bar{x} \in (a,b)$:

$$f'(\bar{x}) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = 0 \qquad (*)$$

Två fall:

1) $f(x) = f(a) = f(b) =$ konstant

$\Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow (*)$ uppfylld

(ii) $\exists\, c \in (a,b) : \quad f(c) \neq f(a) = f(b)$

Lemma $\Rightarrow \exists\, \bar{a} \in (a,c) : \quad f'(\bar{a}) > 0$

(eller $f'(\bar{a}) < 0$)

På samma sätt:

$$\exists\, \bar{b} \in (c,b) : f'(\bar{b}) < 0$$

$$(\text{eller } f'(\bar{b}) > 0).$$

$$\Rightarrow f'(\bar{a}) \cdot f'(\bar{b}) < 0$$

Bolzanos sats bevisar vi i läsvecka 6!

Bolzanos sats ger då att (ty f' är Lipschitz-kontinuerlig)

$$\exists\, \bar{x} \in (\bar{a}, \bar{b}) \subset (a,b) : f'(\bar{x}) = 0.$$

$\therefore$ Medelvärdessatsen uppfylld då $f(a) = f(b)$. Detta kallas Rolles sats.

(ii) Om $f(a) \neq f(b)$ bildar vi funktionen

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a)$$

Notera:

$$g(a) = f(a) - 0 = f(a)$$

Samma!

$$g(b) = f(\cancel{b}) - f(\cancel{b}) + f(a) = f(a)$$

Rolles sats ger

$$\exists\, \bar{x} \in (a,b) : g'(\bar{x}) = 0$$

Men:

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\therefore \quad f'(\bar{x}) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = g'(\bar{x}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad f'(\bar{x}) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

■

* Linearisering

Medelvärdessatsen säger

$$f'(\bar{x}) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Tillämpa på nya variabler

$a = \bar{x}$ (fix punkt)

$b = x$ (variabel)

$\bar{x} = \xi(x)$ (punkt mellan x och $\bar{x}$)

\xi

$$f'(\xi(x)) = \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}}$$

$$f'(\xi)(x - \bar{x}) = f(x) - f(\bar{x})$$

$$\boxed{f(x) = f(\bar{x}) + f'(\xi) \cdot (x - \bar{x})}$$

Alternativ och minst lika viktig formulering av medelvärdessatsen

Om $|x - \bar{x}|$ är liten kan vi anta att

$$f'(\xi) \approx f'(\bar{x})$$

ekvation för en rät linje!

$$\Rightarrow \boxed{f(x) \approx \underbrace{f(\bar{x}) + f'(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x})}}$$

Denna approximation kallas linearisering. f approximeras med en <u>linjär</u> (egentligen "affin") funktion. Vi återvänder till detta senare i kursen!