

* Idag: • Potensserier (5.4)

• Taylorserier (5.5)

F15

Snitt: $\sum_k a_k \rightarrow a$
(ett tal)

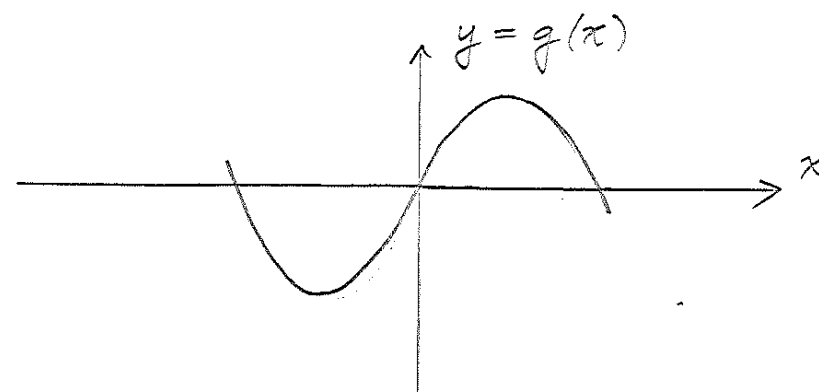
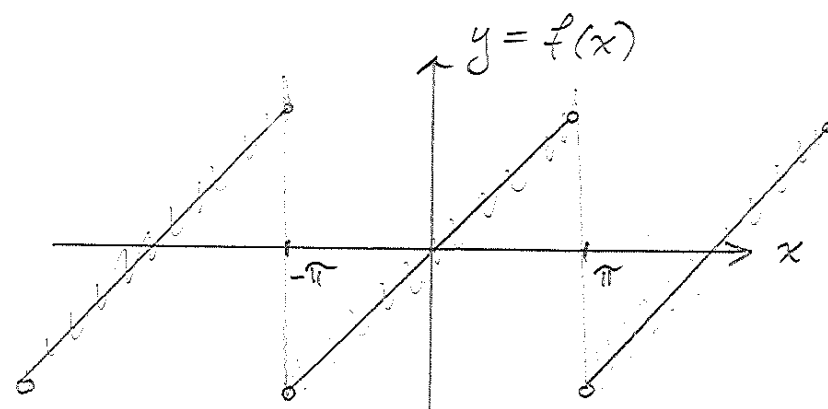
Funktionsserie:

$\sum_k f_k(x) \rightarrow f(x)$
(en funktion)

Exempel:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{k} \sin(kx)$$

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$



← En s.k. Fourierserie

← En s.k. Potensserie

Definition: Potensserie

En serie på formen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - \bar{x})^k$$

$\nearrow$ koefficient $\nwarrow$ centrum

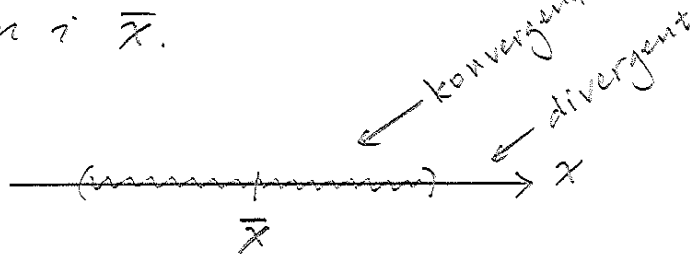
- För vilka x är potensserien konvergent?
- Bestäm konvergensområdet

$$X = \{x \in \mathbb{R} \mid \sum_k a_k (x - \bar{x})^k\}$$

Sats: Potensseriers konvergens

Konvergensområdet ges av en cirkelskiva med radie $R \in [0, \infty]$ centrum i $\bar{x}$.

(ett intervall)



Mer precist gäller att antingen

- (i) Potensserien absolutkonvergent för $x=0$ och annars divergent ($R=0$)
- (ii) Potensserien absolutkonvergent för $|x - \bar{x}| < R$ och divergent för $|x - \bar{x}| > R$ ($0 < R < \infty$)
- (iii) Potensserien absolutkonvergent för alla $x \in \mathbb{R}$ ($R = \infty$)

Bevis:

Behöver endast anta motsatsen till (i) och (ii) och visa att då gäller (iii)!
 Antag alltså att serien är konvergent för något $\tilde{x} \neq \bar{x}$ och att serien inte är (absolut)konvergent i hela $\mathbb{R}$.
 Vi kan också (utan inskränkning) anta att $\bar{x} = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Termtestet} &\Rightarrow a_k \tilde{x}^k \rightarrow 0 \\ &\Rightarrow |a_k \tilde{x}^k| \leq C \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |a_k x^k| = \underbrace{|a_k \tilde{x}^k|}_{\leq C} \cdot \underbrace{\left|\frac{x}{\tilde{x}}\right|^k}_{=\rho} \leq C \rho^k = b_k$$

Jämförelsetest I + geometrisk serie

$\Rightarrow$ Absolutkonvergent för $\rho < 1$,
dvs då $|x| < |\tilde{x}|$.

$\Rightarrow$ Konvergensområdet ges av en cirkelskiva med radie $R \in (0, \infty)$ och konvergensen är absolut innanför cirkelskivan. ■

Notera: Satsen säger inget om vad som händer på randen till cirkelskivan!

Eftersom konvergensområdet är en cirkelskiva gör det meningsfullt att prata om en potensseries konvergensradie.

Definition: Konvergensradie

$$R = \sup_{x \in X} |x - \bar{x}|$$

* Beräkning av konvergensradien

Kvottestet ger

$$\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}| |x - \bar{x}|^{k+1}}{|a_k| |x - \bar{x}|^k}$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \cdot |x - \bar{x}|$$

$$= |x - \bar{x}| \cdot \underbrace{\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}}_{=L}$$

$$= L \cdot |x - \bar{x}| < 1$$

$$\Leftrightarrow |x - \bar{x}| < \underline{\underline{R = 1/L}}$$

Exempel:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k^3+1)(3x+4)^k}{2^k(k^2+6k)}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{3^k(k^3+1)}{2^k(k^2+6k)}}_{=a_k} \cdot \left(x - \underbrace{\left(-\frac{4}{3}\right)}_{=\bar{x}}\right)^k$$

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{3^{k+1}((k+1)^3+1) / (2^{k+1}((k+1)^2+6(k+1)))}{3^k(k^3+1) / (2^k(k^2+6k))}$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \underbrace{\frac{(k+1)^3+1}{k^3+1}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{k^2+6k}{(k+1)^2+6(k+1)}}_{\rightarrow 1} \rightarrow \frac{3}{2} = L$$

$$\Rightarrow R = 3/2$$

$\therefore$ Absolutkonvergent för

$$-\frac{4}{3} - \frac{3}{2} < x - \frac{4}{3} + \frac{3}{2}$$

Sats: Egenskaper för potensserier

$$\begin{cases} \sum_k a_k (x-\bar{x})^k & \text{konvergensradie } R_a > 0 \\ \sum_k b_k (x-\bar{x})^k & \text{konvergensradie } R_b > 0 \end{cases}$$

 $\Rightarrow$

$$(i) \sum_k a_k (x-\bar{x})^k + \sum_k b_k (x-\bar{x})^k = \sum_k (a_k + b_k) (x-\bar{x})^k$$

$$R_{a+b} \geq \min(R_a, R_b)$$

$$(ii) \alpha \sum_k a_k (x-\bar{x})^k = \sum_k \alpha a_k (x-\bar{x})^k$$

$$R_{\alpha a} = R_a \text{ (dvs oförändrad)}$$

(iii)

$$\begin{aligned} D \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-\bar{x})^k &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k D (x-\bar{x})^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} (k+1) (x-\bar{x})^k \end{aligned}$$

$$R_{Da} = R_a$$

Exempel:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad (R=1) \quad (\text{geometrisk serie})$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{(1-x)^2} \cdot (-1) = \sum_{k=0}^{\infty} k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) x^k$$

$$\therefore 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots = \frac{1}{(1-x)^2}$$

för $|x| < 1$

• 5.5 Taylorserier

Taylorpolynom:

$$P_n[f, \bar{x}] = \sum_{k=0}^n \underbrace{\frac{1}{k!} f^{(k)}(\bar{x})}_{a_k} (x - \bar{x})^k$$

Om $n \rightarrow \infty$ får vi en
potensserie som kallas Taylorserien
 för f runt punkten $\bar{x}$. (Definition)

$\Rightarrow$ 1) Har en konvergensradie R

2) Kan deriveras term för term

3) Konvergensen absolut innanför konvergensradien

Betecknas $T[f, \bar{x}]$.

Vi har alltså

$$P_n[f, \bar{x}] \rightarrow T[f, \bar{x}] \text{ då } n \rightarrow \infty$$

Fråga: Om Taylorpolynomet blir alltmer exakt då $n \rightarrow \infty$, gäller då att

$$T[f, \bar{x}] = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n[f, \bar{x}] = f ?$$

Svar: Nej!

Men: Om f kan skrivas som en potensserie så ges den av Taylorserien!

Definition: Analytisk funktion

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ analytisk i en omgivning till $\bar{x}$ om den där kan skrivas som en potensserie

Sats: Taylorserie för analytisk funktion

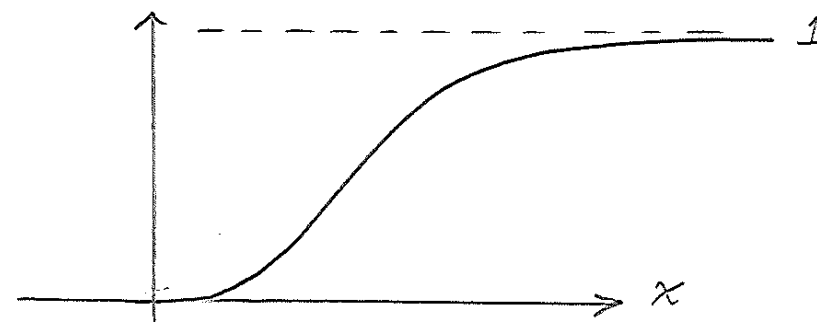
Om f är analytisk i $\bar{x}$ så är

$$f = T[f, \bar{x}]$$

i en omgivning till $\bar{x}$. (Bervis: Se boken!)

Exempel:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \exp(-1/x), & x > 0 \end{cases}$$



$f \in C^\infty(\mathbb{R})$ men ej analytisk i $\bar{x}=0$
 ty $T[f, 0] = 0 \neq f$.
 (Se problem 4.3!)

* Taylorserier för de elementära funktionerna

(Måste kunna!)

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots \quad (\text{geometrisk serie})$$

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{4!} x^4 + \frac{1}{5!} x^5 + \dots \quad (\text{definition!})$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 - \frac{1}{7!} x^7 + \frac{1}{9!} x^9 - \frac{1}{11!} x^{11} + \dots \quad (\text{definition!})$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 - \frac{1}{6!} x^6 + \frac{1}{8!} x^8 - \frac{1}{10!} x^{10} + \dots \quad (\text{definition!})$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k = x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{6} x^6 + \dots$$

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} = x - \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{7} x^7 + \frac{1}{9} x^9 - \frac{1}{11} x^{11} + \dots$$

Jämför exempel
från [F14] och
 $\arctan(1) = \pi/4$

Se diskussion i boken angående definitionen av de elementära funktionerna!