

\* Idag: Komplexa tal

I05 (JM)

\* Lösning av ekvationer

- I begynnelsen fanns  $N = \{1, 2, 3, \dots\}$

Lös

$$x + 3 = 1$$

$x \notin N$ !

- Inför  $\mathbb{Z} \supset N$ , lösning  $x = -2$

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

Lös

$$5x - 3 = 0$$

$x \notin \mathbb{Z}$ !

- Inför  $\mathbb{Q} \supset \mathbb{Z}$ , lösning  $x = \frac{3}{5}$

Lös

$$x^2 = 2$$

$x \notin \mathbb{Q}$ !

Antag:  $\sqrt{2} = p/q$  utan  
gemensamma faktorer  
 $\Rightarrow 2 = p^2/q^2 \Leftrightarrow p^2 = 2q^2$   
 $\Rightarrow p^2$  jämnt  $\Rightarrow p$  jämnt  
 $\Rightarrow p = 2k \Rightarrow (2k)^2 = 2q^2$   
 $\Leftrightarrow 4k^2 = 2q^2 \Leftrightarrow q^2 = 2k^2$   
 $\Rightarrow q$  jämnt  $\Rightarrow$  gemensam faktor

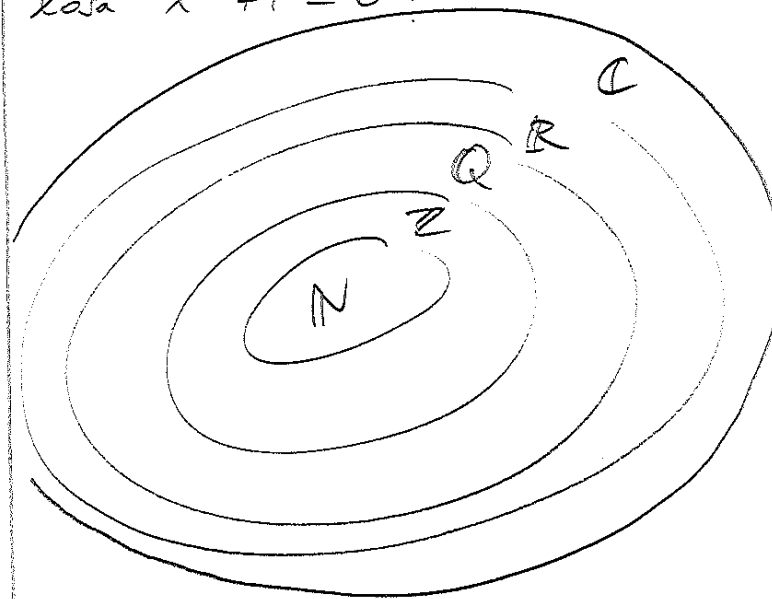
- Inför  $\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$ , lösning  $x = \pm \sqrt{2}$   
(Drumroll...)

Lös

$$x^2 + 1 = 0$$

$x \notin \mathbb{R}$ !!!

Hur utvidgar vi  $\mathbb{R}$  för att kunna  
lösa  $x^2 + 1 = 0$ ?



\* Lösning: inlör den

"imaginära enheten"  $i \in \mathbb{C}$

som uppfyller

$$i^2 = -1$$

$$\Rightarrow x = \pm i \text{ löser } x^2 + 1 = 0$$

I allmänhet ges ett komplext tal som

$$z = a + bi$$

där  $a, b \in \mathbb{R}$  och  $i$  är den imaginära enheten.

Denna (något otillfredsställande) definition av  $\mathbb{C}$  ges i boken (Adams).

Vad är  $i$ ???

\* Definition:  $\mathbb{C}$

$$\mathbb{C} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$$

med operationerna

$$+ : (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$\cdot : (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, bc + ad)$$

Man kan visa att  $\mathbb{C}$  med dessa operationer är en fullständig "kropp" (eng. field).

Första elementet kallas realdel:

$$\operatorname{Re}(a, b) = a$$

Andra elementet kallas imaginärdel:

$$\operatorname{Im}(a, b) = b$$

Vi identifierar  $\mathbb{R}$  med  $\operatorname{Im} = 0$ :

$$\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0\}$$

$$x \in \mathbb{R} \leftrightarrow z = (x, 0) \in \mathbb{C}$$

Notation:

$$(1,0) = 1$$

$$(0,1) = i$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (a,b) &= (a,0) + (0,b) \\ &= a \cdot (1,0) + b \cdot (0,1) \\ &= a \cdot 1 + b \cdot i \end{aligned}$$

$$\therefore (a,b) = a + bi$$

Kontroll 1:

$$z = i = (0,1)$$

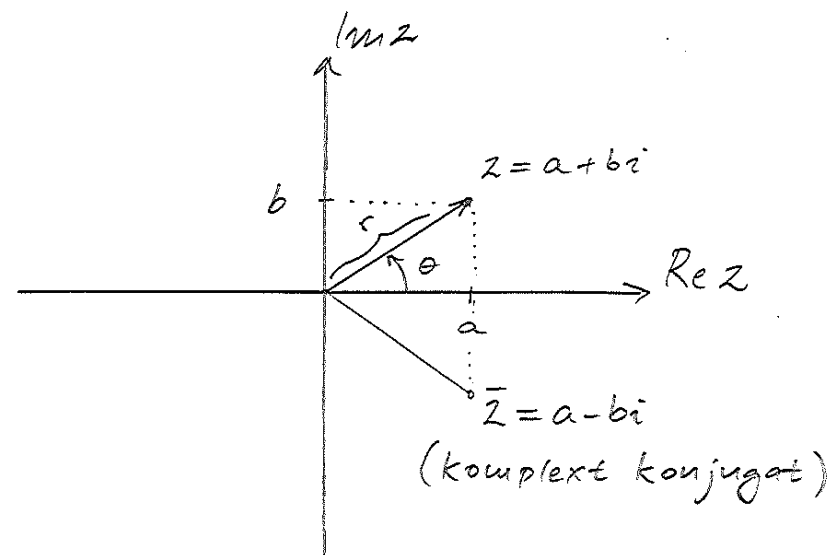
$$\begin{aligned} \Rightarrow z^2 &= (0,1) \cdot (0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) \\ &= (-1, 0) = -1 \quad \underline{\text{oh!}} \end{aligned}$$

Kontroll 2:

$$\begin{aligned} (a,b) \cdot (c,d) &= (a+bi)(c+di) \\ &= ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= ac - bd + (ad+bc)i = (ac-bd, bc+ad) \quad \underline{\text{oh!}} \end{aligned}$$

Slutsats: Räkna som vanligt med tillägget att  $i^2 = -1$ .

\* Grafisk representation



\* Absolutbelopp och argument

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\arg z = \theta$$

Notera:  $\arg z$  är ej unikt bestämd!

$$\arg z = \theta + 2\pi n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

ger alla samma komplexa tal.

\* Polär notation

Från figuren följer:

$$a = r \cdot \cos \theta$$

$$b = r \cdot \sin \theta$$

$$\Rightarrow a + bi = r \cos \theta + r \sin \theta \cdot i \\ = r (\cos \theta + i \sin \theta)$$

Definiera nu:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

Vi kan då skriva

$$z = a + bi = r e^{i\theta}$$

\* Sats:  $e^{iu} \cdot e^{iv} = e^{iu+iv} = e^{i(u+v)}$

Beris:

$$e^{iu} = \cos u + i \sin u$$

$$e^{iv} = \cos v + i \sin v$$

$$\Rightarrow e^{iu} \cdot e^{iv} = (\cos u + i \sin u)(\cos v + i \sin v)$$

$$= \cos u \cdot \cos v - \sin u \cdot \sin v$$

$$+ i \cdot (\sin u \cdot \cos v + \sin v \cdot \cos u)$$

$$= \cos(u+v) + i \sin(u+v)$$

$$= e^{i(u+v)}$$



\* Sats: de Moivre's formel

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

Beris:

$$e^{(i\theta)n} = e^{i\theta} \cdot e^{i\theta} \cdots e^{i\theta} = e^{2i\theta} \cdots e^{i\theta} = \cdots = e^{in\theta}$$



## \* Några räkneregler

(följer enkelt ur definitionen)

$$\operatorname{Re}(\bar{z}) = \operatorname{Re} z$$

$$\operatorname{Im}(\bar{z}) = -\operatorname{Im} z$$

$$|\bar{z}| = |z|$$

$$\arg \bar{z} = -\arg z$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$\bar{z} \cdot z = |z|^2$$

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$$

$$|z_1 / z_2| = |z_1| / |z_2|$$

$$\arg(z_1 / z_2) = \arg z_1 - \arg z_2$$

## \* Ekvationslösning (exempel)

$$\text{Lös } z^{10} + 2z^5 = -1$$

$$\text{Låt } w = z^5$$

$$w^2 + 2w + 1 = 0$$

$$(w+1)^2 = 0$$

Två dubbelrötter:  $w = -1$ 

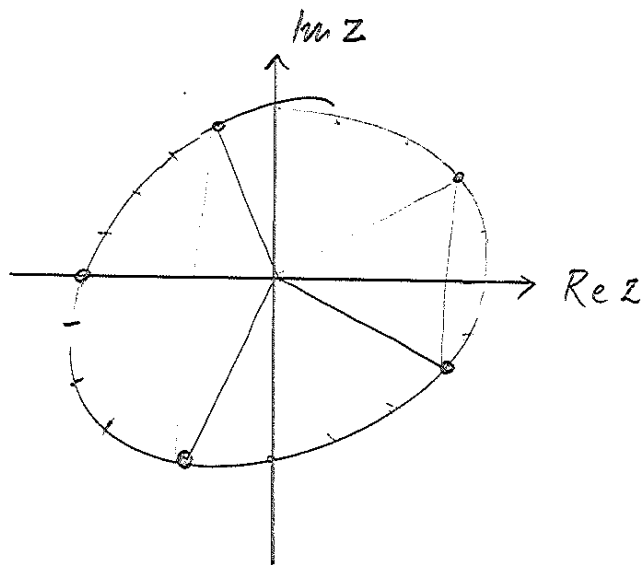
$$\therefore z^5 = -1$$

$$(re^{i\theta})^5 = 1 \cdot e^{i\pi}$$

$$r^5 e^{i5\theta} = 1 \cdot e^{i\pi}$$

$$\begin{cases} r^5 = 1 \\ 5\theta = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = 1 \\ \theta = \pi/5 + \frac{2\pi n}{5}, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$



- En reel dubbelrot
- 4 parvis komplexkonjugerade dubbelrötter

\* Förlängning med komplexkonjugatet

Exempel: Beräkna  $\left| \frac{1+2i}{3+2i} \right|$

$$\begin{aligned} \left| \frac{1+2i}{3+2i} \right| &= \left| \frac{(1+2i) \cdot (3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} \right| \\ &= \left| \frac{3-2i+6i+4}{9+4} \right| = \left| \frac{7+4i}{13} \right| \\ &= \left| \frac{7}{13} + \frac{4}{13}i \right| = \sqrt{\left(\frac{7}{13}\right)^2 + \left(\frac{4}{13}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{49+16}{169}} = \frac{\sqrt{65}}{13} \end{aligned}$$

Alternativ lösning:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1+2i}{3+2i} \right| &= |1+2i| / |3+2i| \\ &= \sqrt{5} / \sqrt{13} \\ &= \frac{\sqrt{5 \cdot 13}}{13} = \frac{\sqrt{65}}{13} \end{aligned}$$