MATEMATIK, Göteborgs universitet

Förslag till Tentamenlösningar

Aritmetik och algebra 7,5hp
LGMA10, L9MA10, VT14, Laura Fainsilber
Fredag 14 mars 2014, kl.8.30-12.30

Poäng ges inte för bara svaren, utan för kvalité och förklaring av lösningarna.

- **Preliminär del:** (7p)

1. *Ange primtalfaktoriseringen för talet* 9945 *(2p)*

$$9945 = 3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 17$$

2. *Använd kvadratkomplettering för att lösa ekvationen* $x^2 + 4x - 5 = 0$. *(2p)*

$$x^2+4x-5 = (x+2)^2-4-5 = (x+2)^2-9 = (x+2-3)(x+2+3) = (x-1)(x+5)$$

Enligt faktorsatsen är lösningar till ekvationen $x^2 + 4x - 5 = 0$
talen $x_1 = 1$ och $x_2 = -5$.

3. *Förenkla följande uttryck:* *(2p)*
   (a) $\sqrt[3]{-54} = -3\sqrt[3]{2}$ eftersom $54 = 2 \cdot 27$ och $27 = 3^3$.
   (b) $\sqrt[12]{a} \cdot \frac{\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[3]{a}} = a^{\frac{1}{12}+\frac{3}{4}-\frac{1}{3}} = \sqrt{a}$ eftersom $\frac{1}{12} + \frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{1+9-4}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.
4. *Ange definitionsmängden för funktionen* $f(x) = \frac{3}{x+|x|}$ *(1p)*
   $x + |x| = 0$ för $x \leq 0$ och $x + |x| = 2x$ för $x > 0$ så $D_f = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$

- **Frågor för betyget G (och VG):** (20p)

1. Följande uttryck är ekvivalenta
   $(a \vee b) \Leftrightarrow (\neg a \Rightarrow b)$ (stod med två gånger, av misstag)
   $(a \Rightarrow \neg b) \Leftrightarrow (b \Rightarrow \neg a) \Leftrightarrow (\neg a \vee \neg b)$

. . . . . .

2. *Faktorisera uttrycket* $x^2 + 14x + 45$. *Förklara hur du går tillväga.* *(2p)*
   Man kan komplettera kvadraten och sedan använda konjugatreglen, eller använda pq-formeln och faktorsatsen, eller se sambandet mellan koefficient och rötterna för att gissa nollställen. Man får faktoriseringen $x^2 + 14x + 45 = (x + 5)(x + 9)$.

. . . . . .

3. *Ge ett exempel på ett polynom som är irreducibelt i* $\mathbb{Q}[X]$ *men reducibelt i* $\mathbb{R}[X]$. *Ange polynomets nollställe.* *(1p)*
   Till exempel en kvadratisk polynom med icke-rationella rötter: $x^2 - 2$ som har de reella nollställe $\pm\sqrt{2}$.

. . . . . .

4. *Ge ett exempel på polynom som är reducibelt i $\mathbb{R}[X]$ men saknar nollställe i $\mathbb{R}$.*

   Polynomet måste ha högre grad än 2. Till exempel en fjärdegradpolynom med två irreducibla kvadratiska faktorer: $(x^2+1)(x^2+2)$.

5. *Lös den diofantiska ekvationen $12x + 7y = 4$.* *(3p)*

   Vi kollar först att ekvationen har lösningar, ty $gcd(12, 7) = 1$ och 4 är delbar med 1.

   Sedan kan man använda Euklides algoritm eller gissa koefficienter till en relation av formen $12u + 7v = 1$. Jag letar efter tal med skillnad 1 i 12:ans och 7:ans multiplikationstabell och hittar $12 \cdot 4 = 48$ och $7 \cdot 7 = 49$ så jag kan skriva

   $$12 \cdot (-4) + 7 \cdot 7 = 1$$

   Multplikation med högerledet 4 ger $12 \cdot (-16) + 7 \cdot 28 = 4$ så $(x_0, y_0) = (-16, 28)$ är en lösning och alla lösningar kan skrivas i formen $(x_n, y_n) = (-16 + 7n, 28 - 12n)$ för någon $n \in \mathbb{Z}$

6. *Lös ekvationen $z^6 = 1$ med komplexa tal både algebraiskt och grafiskt (med "grafiskt" menar jag att du ritar lösningarna i det komplexa planet och förklara hur man ser att just dessa punkter uppfyller ekvationen)* *(5p)*

   Algebraisk lösning: $z^6-1 = (z^3-1)(z^3+1) = (z-1)(z^2+z+1)(z+1)(z^2-z+1)$ så vi har två reella lösningar $z = 1,\ z = -1$ och löser nu de kvadratiska faktorerna:

   För $z^2 + z + 1 = 0$ ger pq-formeln $z_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

   För $z^2 - z + 1 = 0$ ger pq-formeln $z_{3,4} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

   Så ekvationens $z^6 = 1$ har 6 komplexa rötter $1, -1, \pm\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (med alla 4 kombinationer av tecken för de icke-reella rötterna).

   Grafisk lösning: Rita enhetscirkeln och markera punkten $z^6 = 1$ (på den reella axeln). Se Vretblad avsnitt 6.6: Binomialekvation (detta är ett speciellt enkelt fall). Vi jobbar med tal i polär form:

   Lösningarnas längd: Vi har $z^6 = 1$ så $|z^6| = 1$ och $|z|^6 = 1$ vilket ger $|z| = 1$.

   Lösningarnas argument: $\arg(z^6) = 0 + k \cdot 2\pi$ och $6\arg(z) = \arg z^6$ ger

   att $\arg(z) = \frac{1}{6}(0 + k \cdot 2\pi) = k \cdot \frac{\pi}{3}$ för $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

   Detta visualiseras på enhetscirkeln med de 6 punkterna $z = \pm 1$ (på den reella axeln) och $z = \pm\cos\frac{\pi}{3} \pm i\sin\frac{\pi}{3}$ på spetsarna till en regelbunden 6-uddig stjärna.

7. *Låt*

   $$F(n) = 1 + \sum_{i=0}^{n} 2^i$$

   Beräkna $F(0),\ F(1),\ F(2),\ F(3)$ och gissa ett enkelt uttryck för $F(n)$. Bevisa med induktion att ditt uttryck är korrekt. *(5p)*

   Jag börjar med att räkna några värden: $F(0) = 1 + 2^0 = 1 + 1 = 2$, $F(1) = 1+2^0+2^1 = 1+1+2 = 4$, $F(2) = 1+1+2+4 = 8$, $F(3) = 1+1+2+4+8 = 16$. Det mönster som jag ser verkar indikera att $F(n) = 2^{n+1}$. Vi skall se om detta stämmer för alla n.

   Låt P(n) vara påståendet att $F(n) = 2^{n+1}$. Vi skall bevisa att P(n) är sant för alla naturliga tal n med hjälp av induktion.

Basfall: För $n = 0,\ F(0) = 1 + 2^0 = 1 + 1 = 2 = 2^1$: påståendet P(0) stämmer. (man kan om man föredrar börja med $n = 1,\ F(1) = 4 = 2^2$ och konstatera att påståendet P(1) stämmer.)

Induktionssteg: Antag att P(k) stämmer för något naturligt tal k, dvs. att $F(k) = 2^{k+1}$. Vi skall nu visa att det medför att även P(k+1) stämmer.

P(k+1) är påståendet att $F(k+1) = 2^{k+2}$. För att bevisa det försöker vi räkna ut $F(k+1)$. Vi skriver om $F(k+1) = 1+\sum_{i=0}^{k+1} 2^i = 1+(\sum_{i=0}^{k} 2^i)+2^{k+1} = F(k)+2^{k+1}$ och kan använda induktionsantagande för att skriva $F(k+1) = 2^{k+1} + 2^{k+1} = 2^{k+2}$ vilket ger det önskade uttrycket. Så vi har visat att P(k) medför P(k+1).

Slutsats: Enligt induktionsprincipen gäller P(n) för alla naturliga tal n.

- **Frågor för betyget VG:** (10p)

1. *Formulera aritmetikens fundamentalsats och skissa på huvudpunkterna i beviset. (5p)*
   Se Sats 2.16 i Vretblad: Varje heltal $a \geq 2$ kan skrivas som en produkt av primtal på precist ett sätt, om man bortser från faktorernas ordningsföljd.

   För att bevisa satsen behöver man först bevisa att en primtalsuppdelning finns (sats 2.8), t.ex. med ett lemma liknande lemma 2.7 (Om $a \geq 0$ inte är ett primtal, så är den minsta positiva äkta delare till a ett primtal), eller med ett motsägelsebevis (ta det minsta $a \geq 2$ som inte kan skrivas som produkt av primtal. a är då inte primtal själv så a kan skrivas som produkt av två tal. Dessa två tal är mindre än a, så de kan skrivas som produkt av primtal, vilket ger en primtalsfaktorisering för a och leder till en motsägelse).

   Sedan visar man att om man har två primtalsfaktoriseringar (och ger bra beteckningar, säg $a = \prod_{i=1}^{s} p_i = \prod_{j=1}^{r} q_j$), så måste p_1 dela (och därmed vara lika med) en av de q_j, och steg för steg visa att primtalsuppdelningarna sammanfaller.

2. – *Lös ekvationen $x^2 + y^2 = 0$ i $\mathbb{Z}_5$ (restklasser modulo 5).*
   Det snabbaste här är att räkna alla kvadrater i $\mathbb{Z}_5 = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ (väljer man $0, 1, 2, 3, 4$ tar det några minuter extra, men det går lika bra) för att se vilka som kan kombineras för att ge en summa 0.
   Vi räknar $(-2)^2 \equiv 2^2 \equiv 4 \equiv -1$, sedan $(-1)^2 \equiv 1^2 \equiv 1$, och $0^2 \equiv 0$. Och vi ser att om vi adderar en kvadrat som är -1 med en som är 1, så löser vi ekvationen. Vi får då t.ex. $2^2 + 1^2 \equiv 0$!
   Alla 9 lösningar ges av $(x, y) = \{(\pm 2, \pm 1), (\pm 1, \pm 2), (0, 0)\}$.
   – *Lös samma ekvation i $\mathbb{Z}_7$ (restklasser modulo 7).* *(5p)*
   Med samma metod, vi räknar alla kvadrater modulo 7: $(-3)^2 \equiv 3^2 \equiv 9 \equiv 2$, sedan $(-2)^2 \equiv 2^2 \equiv 4 \equiv -3$, $(-1)^2 \equiv 1^2 \equiv 1$ och $0^2 \equiv 0$, men när vi försöker kombinera två av dessa kan vi inte få 0 (-1 är inte en kvadrat modulo 7), så det finns inga lösningar förutom $(0, 0)$.
   Gauss jobbade med detta och såg att för de primtal p som är kongruenta med 1 modulo 4 (som t.ex. 5), liksom för $p = 2$, så är -1 en kvadrat modulo p och då kan summan av två kvadrater vara noll modulo p. För de andra primtalen (som inte är kongruenta med 3 modulo 4), t.ex. 7, så är inte -1 en kvadrat, och ekvationen har inga lösningar. Detta är ett exempel på egenskaper som skiljer sig mellan olika primtal och beror på en kongruensrelation, inte på hur stort primtalet är.