

Preliminärdelen

$$1) \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$2) \frac{(a^4 + b^4)(a^4 - b^4)}{(a^2 - b^2)^2} = \frac{(a^4 + b^4)(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)}{(a^2 - b^2)^2}$$

$$\text{for } a \neq \pm b \quad = \frac{(a^4 + b^4)(a^2 + b^2)}{(a^2 - b^2)}$$

$$3) f(x) = y = (x-3)^3 + 2$$

$$y - 2 = (x-3)^3$$

$$\sqrt[3]{y-2} = x-3$$

$$x = g(y) = \sqrt[3]{y-2} + 3$$

$$4) 1621 = 1024 + 597$$

$$= 1024 + 512 + 85$$

$$= 1024 + 512 + 64 + 16 + 4 + 1$$

$$= [1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0]_2$$

Anonym kod	Omtenta LGMA10/L9MA10 V14 2014-06-10	sid.nummer 1
------------	--------------------------------------	-----------------

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

- (a) Ange definitionsområdet och förenkla uttrycket för funktionen (3p)

$$f(a) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + a^3}}$$

Lösning:

$f(a)$ är definierad om $a^2 + a^3 = a^2(1+a) > 0$
dvs om $a \neq 0$ och $a > -1$

Då är $f(a) = \frac{a}{\sqrt{a^2(1+a)}} = \frac{a}{|a|\sqrt{1+a}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1+a}} & \text{om } a > 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{1+a}} & \text{om } -1 < a < 0 \end{cases}$

Svar:

$D_f = \{a \in \mathbb{R} : a \neq 0 \text{ och } a > -1\}$

- (b) Ange kvot och rest för polynomdivisionen av $P(x) = x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 7x + 4$ med $Q(x) = x^2 + 1$ (2p)

Lösning: vi gör polynomdivision:

$$\begin{array}{r} x^2 + 5x - 3 \\ x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 7x + 4 \quad | \quad x^2 + 1 \\ -(x^4 \quad + x^2) \\ \hline 0 + 5x^3 - 3x^2 + 7x \\ -(5x^3 \quad + 5x) \\ \hline 0 - 3x^2 + 2x + 4 \\ -(-3x^2 - 3) \\ \hline 0 \quad 2x + 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{kvot: } x^2 + 5x - 3 \\ \text{Rest: } 2x + 7 \end{array}$$

Svar: $-(3x^2 - 3)$

$P(x) = Q(x)(x^2 + 5x - 3) + 2x + 7$

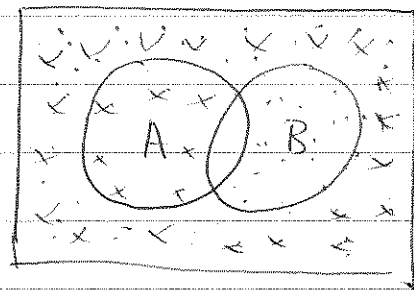
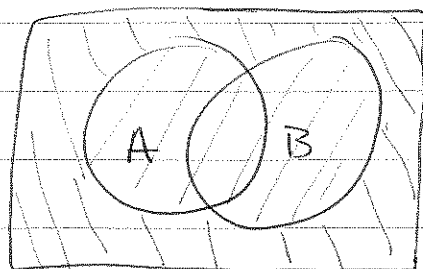
- (c) Ge ett exempel på ett polynom som är reducibelt i $\mathbb{R}[X]$ men saknar nollställe i $\mathbb{R}$. Förklara varför polynomet uppfyller villkoren. (2p)

Det måste vara ett polynom av grad minst 4 eftersom ett reducibelt polynom av grad 2 eller 3 har faktorer av grad 1, dvs nollställe (faktorsatsen). Vi väljer en produkt av två irreducibla kvadratiske faktorer (dvs med komplexa, icke-reella nollställen).
ex: $P(x) = (x^2 + 1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1$.
har dubbla nollställe i och $-i$ i $\mathbb{C}$, inga i $\mathbb{R}$.

G-delen

1) se separat blad

2)



/// : $A \cup B$

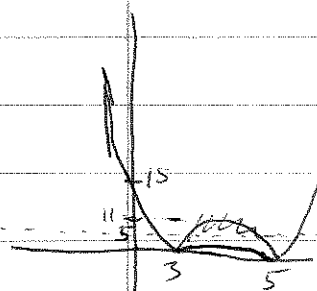
\\ : $(A \cup B)^*$

· : A^*

x : B^*

De element som inte ingår i unionen av A & B är precis de som tillhör varken A eller B , dvs de som tillhör både komplementet till A och komplementet till B .

$$3) |x^2 - 8x + 15| = |(x-3)(x-5)|$$



så vi behöver titta på intervallen $x \in (-\infty, 3)$, $[3, 5]$, $(5, +\infty)$ separat och gör det i en tabell:

	3	5
$ x^2 - 8x + 15 = (x-3)(x-5)$	$= -(x-3)(x-5)$	$= (x-3)(x-5)$
$f(x) \leq 5 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 10 = 0$	$f(x) = 5 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 15 = -5$	se $(-\infty, 3)$
$\Leftrightarrow x = 4 \pm \sqrt{16-10}$	$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 20 = 0$	
$= 4 \pm \sqrt{6}$	$\Leftrightarrow x = 4 \pm \sqrt{16-20}$	$f(x) = 5 \Leftrightarrow x = 4 + \sqrt{6}$
$\Leftrightarrow x = 4 - \sqrt{6}$	inga reella rötter.	

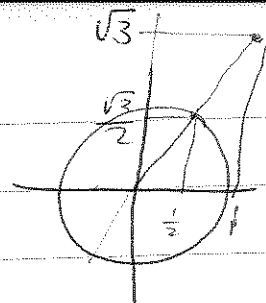
så $|x^2 - 8x + 15| \leq 5$ för alla $x \in [4 - \sqrt{6}, 4 + \sqrt{6}]$

4. Multiplikationstabell modulo 9

$\cdot$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	0	2	4	6	8	1	3	5	7
3	0	3	6	0	3	6	0	3	6
4	0	4	8	3	7	2	6	1	5
5	0	5	1	6	2	7	3	8	4
6	0	6	3	0	6	3	0	6	3
7	0	7	5	3	1	8	6	4	2
8	0	8	7	6	5	4	3	2	1

5. $\sqrt{5}$ är irrationellt: se Satz 2.20: Kieblad.

VG-frågor



$$1 \text{ a) } z = 1 + i\sqrt{3} = 2 \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \right) \\ = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$b) z \text{ har } |z| = 2 \text{ och } \arg(z) = \frac{\pi}{3}$$

$$z^n \text{ har } |z^n| = 2^n \text{ och } \arg(z^n) = n \cdot \frac{\pi}{3}$$

så potenserna av z^n ligger längs en spiral
på punkter med argument $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 0$.

$$\arg(z^n) = \pi \text{ om } n \text{ är en udda multipel av } 6 \\ \arg(z^n) = 0 \text{ om } n \text{ är en multipel av } 6$$

$$c) |z^{100}| = 2^{100} \text{ och } \arg(z^{99}) = \pi, \text{ så } \arg(z^{100}) = 0$$

$$\text{så } z^{100} = 2^{100} \cdot \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)$$

$$= 2^{100} \cdot \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$= -2^{99} - i \cdot 2^{99} \cdot \sqrt{3}$$