MATEMATIK, Göteborgs universitet

Omtentamen

Aritmetik och algebra 7,5hp
LGMA10, L9MA10, VT14, Laura Fainsilber
Fredag 22 augusti i 2014, kl.8.30-12.30

Förklara hur du resonerar och räknar. Poäng ges inte för bara svaren, utan för kvalité och förklaring av lösningarna.

- **Preliminär del:** (8p)

  1. Skriv summan $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots + 1024$ med hjälp av summatecknet. (2p)
     Lösning:$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots + 1024 = \sum_{k=0}^{k=10} 2^k$
  2. Uppdela $3a^3 + 81b^3$ i en produkt av tre faktorer. (2p)
     Lösning: $3a^3 + 81b^3 = 3(a^3 + (3b)^3) = 3(a + 3b)(a^2 - 3ab + 9b^2)$
  3. Bilda funktionerna $f \circ g$ och $g \circ f$ där $f(x) = x^2 + 1$ och $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$ (2p)
     Lösning: $f \circ g(x) = (\frac{1}{x^2+1})^2 + 1 = \frac{x^2+2}{(x^2+1)^2}$
     $g \circ f(x) = \frac{1}{f(x)^2+1} = \frac{1}{x^2+2}$
  4. Skriv $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}$ med heltalsnämnare. (2p)
     Lösning: $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{3})^2}{(\sqrt{6}+\sqrt{3})(\sqrt{6}-\sqrt{3})} = \frac{6+3-2\sqrt{18}}{6-3} = \frac{9-6\sqrt{2}}{3} = 3 - 2\sqrt{2} = \frac{3-2\sqrt{2}}{1}$

- **Frågor för betyget G (och VG):** (20p)

  1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Bladet lämnas in tillsammans med övriga lösningar. (6p)
  2. Formulera den kommutativa lagen för multiplikation och illustrera den grafiskt. (2p)
  3. Beräkna d =SGD$(165, 102)$ och två heltal u och v sådana att $d = 165u + 102v$. (3p)
  4. Skissa grafer för följande funktioner: (3p)
     (a) $f(x) = |x^2 - 2x - 2|$
     (b) $g(x) = |x^2 - 2x + 1|$
     (c) $h(x) = |-x^2 - 2x + 1|$
  5. (a) Bevisa med induktion att $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1-x^n}{1-x}$ för heltal $n > 0$. (5p)

Anonym kod	Omtenta LGMA10/L9MA10 V14 2014-06-10	sid.num 1

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) För vilka värden av x är följande uttrycket negativt

$$\frac{x^2+6x+10}{x^2-1}$$

(2p)

Lösning:

Täljaren $x^2+6x+10=(x+3)^2+1$ är alltid positiv

Nämnaren $x^2-1=(x-1)(x+1)$ är negativ

för $-1<x<1$

OBS: uttrycket är odefinierat för $x \in \{-1, 1\}$.

Svar: för $x \in (-1, 1)$

(b) Skriv talet $\frac{4}{13}$ på decimalform. jag utför divisionen (2p)

Lösning:

$0,307692307692\ldots$

$4{,}0 \div 13$

40
39
100
91
90
78
120
117
30
26
40

13-s tabell: 13, 26, 39, 52, 65, 78, 91, 104, 117, 130

Svar: $4/13 = 0,\overline{307692}$

(c) Lös ekvationen $z^3 - z^2 + 3z + 5 = 0$ genom att först gissa en rot. (2p)

Lösning:

Jag testar och ser att $z=-1$ är en rot.

Så $(z+1)$ delar polynomet och jag faktoriserar:

$z^3 - z^2 + 3z + 5 = (z+1)(z^2-2z+5)$ (faktorsatsen)

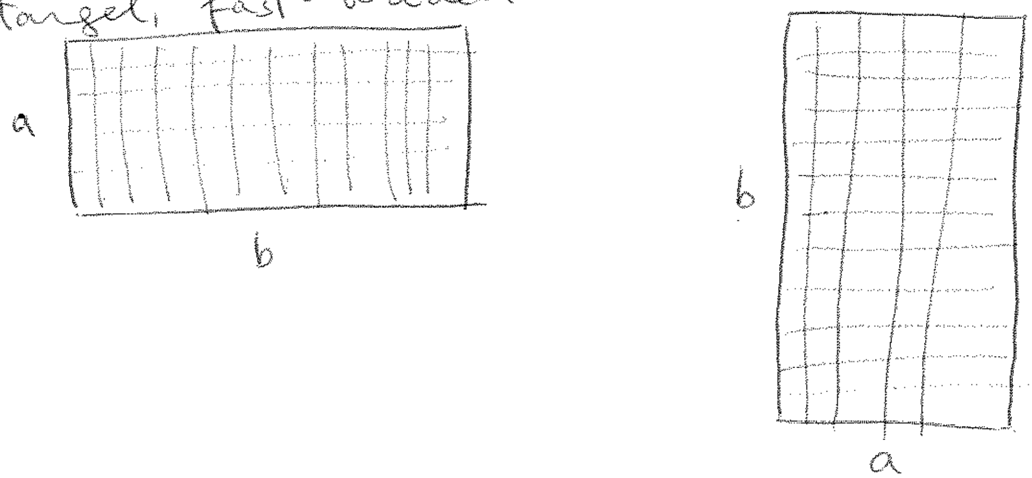
Sedan löser jag $z^2-2z+5=0$ med hjälp av pq-formeln.

Svar: $z_1 = -1$, $z_2 = 1+4i$, $z_3 = 1-4i$

G-2 Den kommutativa lagen säger att för alla par av tal a och b, så är

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Om man illustrerar multiplikation som area av en rektangel kan man rita samma rektangel, fast vriden.



G-3 Vi använder Euklides algoritm.

$$165 = 102 \cdot 1 + 63$$
$$102 = 63 \cdot 1 + 39$$
$$63 = 39 \cdot 1 + 24$$
$$39 = 24 \cdot 1 + 15$$
$$24 = 15 \cdot 1 + 9$$
$$15 = 9 \cdot 1 + 6$$
$$9 = 6 \cdot 1 + \boxed{3} \quad \text{SGD}$$
$$6 = 2 \cdot 3 + 0$$

och den utökade algoritmen för att hitta koefficienterna

$$\boxed{3} = 9 - 6 = 9 - (15-9) = -15 + 2 \cdot 9$$
$$= -15 + 2(24-15) = -3 \cdot 15 + 2 \cdot 24$$
$$= 2 \cdot 24 - 3(39-24) = 5 \cdot 24 - 3 \cdot 39$$
$$= -3 \cdot 39 + 5(63-39) = 5 \cdot 63 - 8 \cdot 39$$
$$= 5 \cdot 63 - 8(102-63) = 13 \cdot 63 - 8 \cdot 102$$
$$= -8 \cdot 102 + 13(165-102) = -21 \cdot 102 + 13 \cdot 165$$

grupperat

bytt ut resten mot tidigare rester med ekvation

så $v = -21$, $u = 13$

G-4: $f(x) = |x^2 - 2x - 2|$

$= |x^2 - 2x + 1 - 3| = |(x-1)^2 - 3|$

parabeln $(x-1)^2 - 3$ har minimum vid $(x,y) = (1,-3)$

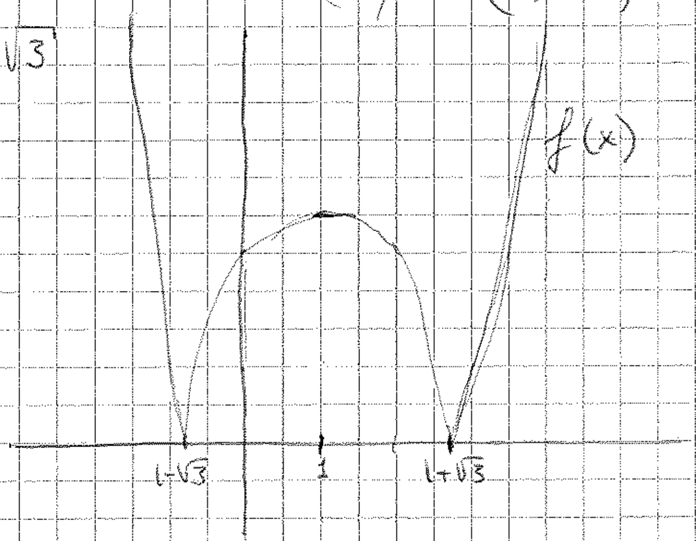
$f(x) = 0$ då $x - 1 = \pm\sqrt{3}$

dvs $x = 1 \pm \sqrt{3}$

$f(0) = 2$

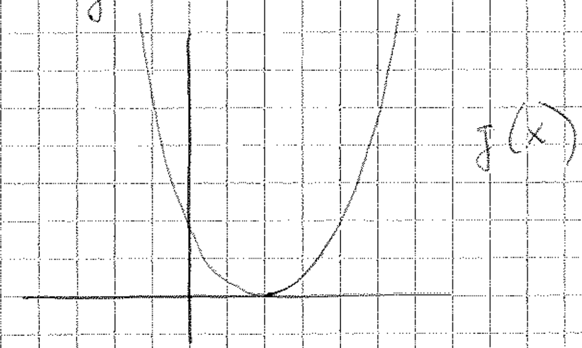
$f(3) = 1$

$f(4) = 6$



$g(x) = |x^2 - 2x + 1| = |(x-1)^2| = (x-1)^2$

ty alltid ≥ 0.



$h(x) = |-x^2 - 2x + 1| = |x^2 + 2x - 1|$

$= |(x+1)^2 - 2|$

minimum vid $x = -1, y = 2$

$y = 0$ för $x + 1 = \pm\sqrt{2}$

$x = -1 \pm \sqrt{2}$

$f(1) = 2$

$f(0) = 1$

(b) Känner du till ett annat bevis för samma påstående? (1p)

Lösning: För att bevisa med induktion att $\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1-x^n}{1-x}$ för alla $n \in \mathbb{N}$ börjar vi med att konstatera att likheten gäller för $n = 1$ (basfall) då vänsterledet är $x^0 = 1$ och högerledet $\frac{1-x}{1-x} = 1$.

Vi antar sedan att likheten gäller för något naturligt tal p, nämligen att $\sum_{k=0}^{p-1} x^k = \frac{1-x^p}{1-x}$ och vill visa att motsvarande likhet gäller för $p+1$.

Vi har då i vänsterledet $\sum_{k=0}^{p} x^k$ som kan skrivas som $\frac{1-x^p}{1-x} + x^p$ enligt induktionsantagendet. Men $\frac{1-x^p}{1-x} + x^p = \frac{1-x^p}{1-x} + \frac{x^p - x^{p+1}}{1-x} = \frac{1-x^{p+1}}{1-x}$ vilket var det förväntade högerledet.
Därmed har vi visat att om likheten gäller för något naturligt tal, så gäller den även för nästa naturligt tal. Eftersom den gället för talet 1, så gället den för alla naturliga tal.
För ett annat bevis kan man utföra polynomdivision av $1 - x^n$ med $1 - x$. Då växer vänsterledet fram (prova först med n=3 eller n=4).

V.G. Vänd för VG-frågor!

VG - 1 : Det finns inga fler primtalstripplar:

Av tre successiva udda tal är minst ett delbart med 3.

Bevis: Låt p vara ett primtal större än 3 och betrakta p, $p+1$, $p+2$, $p+3$, $p+4$.

Av talen, $p, p+1, p+2$ är ett delbart med 3. Om $p+2$ är det, så är det inget primtal. Om $p+1$ är det, så är även $p+4$ delbart med 3, och därmed inget primtal.

Så det finns inga primtalstripplar av formen $(p, p+2, p+4)$ för $p>3$.

VG - 2 : Använd faktorsatsen.

(a) Om $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$

$$= (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)$$

så har man $a = -(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) = -\sum_{i=1}^{4} \alpha_i$

$$b = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4 = \sum_{1\le i<j\le 4} \alpha_i\alpha_j$$

$$c = -(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_3\alpha_4 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4)$$

$$= -\sum_{1\le \alpha_i<\alpha_j<\alpha_k\le 4} \alpha_i\alpha_j\alpha_k$$

$$d = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = \prod_{i=1}^{4} \alpha_i$$

(b) för $P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$

har man t. ex $a_{n-1} = -\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ $\qquad a_{n-2} = \sum_{1\le i<j\le n} \alpha_i\alpha_j$

$$a_0 = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} \alpha_i$$