

L9MA10/LGMA10 VT14

Aritmetik och algebra: exempel på tentafrågor

Detta är en samling med många frågor. På själva examination kommer några frågor i varje del. Inga hjälpmedel är tillåtna (ingen miniräknare!). Lösningar till dessa frågor läggs ut måndag 10 mars.

Du som är godkänd på minst 6 av 7 veckouppgifter behöver inte svara på den preliminära delen alls och behöver 15p från G-delen för att bli godkänd.

Du som är godkänd på 4 eller 5 veckouppgifter svarar på 3 av frågorna och behöver minst 15p från G-delen och totalt 18p från preliminärdelen och G-delen.

Du som är godkänd på färre än 4 veckouppgifter behöver minst 15p från G-delen och totalt 20p från preliminärdelen och G-delen.

För betyget VG krävs 22p sammanlagt från G-delen och VG-delen.

Poängsättningen är inte spikad. Det finns ett diskussionsforum i GUL där du kan göra ett inlägg om du tycker att poängsättningen på en av uppgifterna inte motsvarar uppgiftens svårighet/omfattning. Det kommer att hjälpa mig kalibrera poängen i tentan.

- **Preliminär del:** Tentan innehåller preliminära frågor motsvarande 7p.

1. Lös ekvationen $x^2 = |9 - x^2|$ för reella tal x . (2p)
2. Använd kvadratkompletering för att bestäma största värdet av funktionen $f(x) = x + 1 - 5x^2$ (2p)
3. Bestäm de reella lösningarna till ekvationen $e^{2x} + 2e^x = 3$. (2p)
4. Faktorisera polynomet $27x^3 + 27x^2 + 9x + 1$. (1p)
5. För vilka värden på x är värdet av $2x - 2x^2 + 14$ mindre än värdet av $x^2 - 4x + 5$? (2p)
6. Skriv förljande utsaga och dess negation i symbolisk form: *För varje reellt tal finns ett tal som är större.* (2p)
7. Översätt talet 2014 till binär form. (2p)

- **Frågor för betyget G (och VG!):** Tentan innehåller G-frågor motsvarande 20p

1. För vilka reella tal x gäller det att (5p)

$$\frac{1}{x-1} + \frac{2}{2x+1} \geq 1?$$

2. För vilka reella tal x gäller det att $\sqrt{13+x} - x = 1$? (3p)
3. Ange minst 2 logiska uttryck som är ekvivalenta med: $p \Rightarrow q$. (3p)
4. Illustrera och förklara De Morgans lag: $(A \cap B)^* = A^* \cup B^*$ (3p)
5. (a) Bevisa med induktion att $\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1-x^n}{1-x}$
(b) Bevisa samma påstående med hjälp av polynomdivision. (5p)
6. OBS! Denna fråga är svårare än vad jag hade tänkt /Laura Avgör om 39917 är ett primtal (3p)

7. Visa att talet $\sqrt{5}$ är irrationellt. (5p)
 8. Lös den diofantiska ekvationen $5x - 14y = 3$. (3p)
 9. Upprätta en multiplikationstabell för alla tal modulo 8. (3p)
 10. Beräkna entalssiffran för talet 413^{36} . (3p)
 11. Räkna SGD för polynomen $f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 6x - 6$ och $g(x) = x^3 + 3x^2 - 8x + 10$.
Ange rötter och faktorisering för $f(x)$ och $g(x)$ i $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ och $\mathbb{Q}[X]$. (5p)
 12. Lös ekvationen $z^3 = 4(1 - i\sqrt{3})$ både algebraiskt och grafiskt (med "grafiskt" menar jag att du ritar lösningarna i det komplexa planet och förklara hur man ser att just dessa punkter uppfyller ekvationen). (5p)
- **VG-frågor:** Frågorna ger 5p var. Tentan innehåller VG-frågor motsvarande 10p Bonuspoäng (1 till 3) från funktionsfilmen räknas här.
 1. Finns det heltal n sådana att 21 delar $n^8 + 3n^2 + 1$? Vilka är de i så fall?
 2. Bevisa att om p är ett primtal som delar produkten $a \cdot b$, så måste p dela minst ett av heltalen a och b .
 3. Ge exempel på polynom av grad 4 i $\mathbb{Q}[X]$ med
 - (a) 4 nollställen i $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ och $\mathbb{C}$,
 - (b) 2 nollställe i $\mathbb{Q}$ men 4 nollställen i $\mathbb{R}$ och $\mathbb{C}$,
 - (c) 2 nollställen i $\mathbb{Q}$ och $\mathbb{R}$ men 4 nollställen i $\mathbb{C}$,
 - (d) 1 nollställe i $\mathbb{Q}$, 2 nollställen i $\mathbb{R}$ och 4 nollställen i $\mathbb{C}$.
 4. Låt $z = 1 - i$ vara ett komplext tal.
 - (a) Skriv z på polär form.
 - (b) Rita z i det komplexa talplanet och förklara hur potenser z^n kan ligga för olika naturliga tal n .
 - (c) Skriv z^{99} på både polär form och på formen $a + bi$ där a och b är explicit angivna (innehåller inte några trigonometriska funktioner).