

L9MA10/LGMA10 VT14

Aritmetik och algebra: exempel på tentafrågor Jag försöker skriva lösningarna som jag önskar att ni skriver dem. Det är inte bara svar som efterfrågas, utan även beräkningar och förklaringar. Deloängsangivningar ger en indikation om hur mycket vikt jag lagt på olika bitar i uppgifterna. Hur tydligt och fullständigt ni uttryckt er spelar också roll i helhetsbedömningen för varje uppgift.

/Laura

- **Preliminär del:** Tentan innehåller preliminära frågor motsvarande 7p.

1. Lös ekvationen $x^2 = |9 - x^2|$ för reella tal x . (2p)

Vi delar upp i två fall, beroende på tecknet för $9 - x^2$:

Fall 1: $9 - x^2 \geq 0$ gäller om och endast om $-3 \leq x \leq 3$. Då lyder ekvationen: $x^2 = 9 - x^2 \Leftrightarrow 2x^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 = \frac{9}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{3}{\sqrt{2}} = \pm \frac{3\sqrt{2}}{2}$. Dessa lösningar ligger i intervallet $-3 \leq x \leq 3$ så de är riktiga lösningar.

Fall 2: $9 - x^2 \leq 0$ gäller om och endast om $x < -3$ eller $x > 3$. Då lyder ekvationen $x^2 = x^2 - 9 \Leftrightarrow 0 = -9$ vilket är falskt, så vi får inga nya lösningar här.

Slutsats: Ekvationen har två lösningar: $x = \pm \frac{3\sqrt{2}}{2}$

2. Använd kvadratkompletering för att bestäma största värdet av funktionen $f(x) = x + 1 - 5x^2$ (2p)

$f(x) = -5x^2 + x + 1 = -(5x^2 - x - 1) = -(\sqrt{5}x - \frac{1}{2\sqrt{5}}) - \frac{1}{20} - 1 = -(\sqrt{5}x - \frac{\sqrt{5}}{10}) + \frac{21}{20}$. Den första termens maxvärde är 0 så $f(x)$ når maxvärdet $\frac{21}{20}$ (för $x = \frac{1}{10}$; Kolla det!).

3. Bestäm de reella lösningarna till ekvationen $e^{2x} + 2e^x = 3$. (2p)

Vi byter variabel och låter $y = e^x$. Då vill vi först lösa ekvationen $y^2 + 2y - 3 = 0$. Man hittar nollställena $y = 1$ och $y = 3$, som ger $x = \ln 1$ och $x = \ln 3$.

4. Faktorisera polynomet $27x^3 + 27x^2 + 9x + 1$. (1p)

Man känner igen formeln för en tredje potens: $27x^3 + 27x^2 + 9x + 1 = (3x + 1)^3$

5. För vilka värden på x är värdet av $2x - 2x^2 + 14$ mindre än värdet av $x^2 - 4x + 5$? (2p)

Olikheten är ekvivalent med olikheten $3x^2 - 6x - 9 > 0$. Man kan börja med att lösa motsvarande ekvation: $3x^2 - 6x - 9 = 0$ med pq-formeln eller kvadratkompletering och få nollställena $x = -1$ och $x = 3$. Rita gärna tallinjen och testa de olika områden. Så får man att olikheten gäller för $x < -1$ och för $x > 3$, vilket man kan dubbelkolla med ursprungsuttrycket.

6. Skriv följande utsaga och dess negation i symbolisk form: För varje reellt tal finns ett tal som är större. (2p)

Variablerna tar sina värden bland de reella talen. $\forall x : \exists y : y > x$

Negationen: Det finns ett reellt tal som inte har något tal som är större: $\exists x : \forall y : y \leq x$

7. Översätt talet 2014 till binär form. (2p)

Man kan använda successiva divisioner där resten ger siffrorna (med entalssiffran först), eller börja med den största 2-potensen som är mindre än 2014. $2014 = 1024 + 990$. Sedan letar man upp den största 2-potensen som är mindre än 990, osv, för att skriva 2014 som summa av 2-potenser. Efter några steg för man $2014 = 1024 + 512 + 256 + 128 + 64 + 16 + 8 + 4 + 2 = (11111011110)_2$

Man kan också konstatera att 2014 är ganska nära nästa 2-potens: $2048 = 2^{11}$ så $2047 = (11111111111)_2$ och subtrahera $32 + 1$ därifrån.

• **Frågor för betyget G (och VG!):** Tentan innehåller G-frågor motsvarande 20p

1. För vilka reella tal x gäller det att (5p)

$$\frac{1}{x-1} + \frac{2}{2x+1} \geq 1?$$

Vi flyttar över i ena ledet, skriver på gemensamt bråkstreck och faktorerar:

$$\begin{aligned} 0 &\geq 1 - \frac{1}{x-1} - \frac{2}{2x+1} = \frac{(x-1)(2x+1) - (2x+1) - 2(x-1)}{(x-1)(2x+1)} \\ &= \frac{2x^2 - 5x}{(x-1)(2x+1)} = \frac{x(2x-5)}{(x-1)(2x+1)} = A(x). \end{aligned}$$

Vi observerar att täljaren blir noll när $x = 0$ och när $x = 5/2$, medan nämnaren är noll när $x = -1/2$ och när $x = 1$. Vi gör en tecken tabell liknande dem s.23 i Vretblad, med gränser $-1/2, 0, 1, 5/2$ och rader för $x, (2x-5), (x-1), (2x+1)$.

Vi avläser svaret i tabellen och ser att $A(x) \leq 0$ när $-1/2 < x \leq 0$ samt när $1 < x \leq 5/2$.

Svar: När $-1/2 < x \leq 0$ samt när $1 < x \leq 5/2$.

2. För vilka reella tal x gäller det att $\sqrt{13+x} - x = 1$? (3p)

Vi lägger till x i båda leden och kvadrerar. Det blir då $13+x = (x+1)^2$, som förenklas till $0 = x^2 + x - 12 = (x+4)(x-3)$. Detta ger oss $x = -4$ eller $x = 3$. Eftersom vi kvadrerat ekvationen kan vi inte vara säkra på att någon av dessa lösningar duger i den ursprungliga ekvationen. Prövning ger att $x = 3$ duger, men inte $x = -4$. Svar: $x = 3$.

3. Ange minst 2 logiska uttryck som är ekvivalenta med: $p \Rightarrow q$. (3p)

$\neg q \Rightarrow \neg p$ är en, $\neg p \vee q$ är en annan.

4. Illustrera och förklara De Morgans lag: $(A \cap B)^* = A^* \cup B^*$ (3p)

Jag avstår från teckningen med ordbehandlare. Den skall se ut som Figur 3 s.48 i Vretblad, där man skuggat allt utom snittetmängden $A \cap B$. De element som inte ligger i snittet, dvs. som inte tillhör både A och B , är de som tillhör komplementet till minst en av mängderna A och B .

5. (a) Bevisa med induktion att $\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1-x^n}{1-x}$
(b) Bevisa samma påstående med hjälp av polynomdivision. (5p)

Lösning: För att bevisa med induktion att $\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1-x^n}{1-x}$ för alla $n \in \mathbb{N}$ börjar vi med att konstatera att likheten gäller för $n = 1$ (basfall) då vänsterledet är $x^0 = 1$ och högerledet $\frac{1-x}{1-x} = 1$.

Vi antar sedan att likheten gäller för något naturligt tal p , nämligen att $\sum_{k=0}^{p-1} x^k =$

$\frac{1-x^p}{1-x}$ och vill visa att motsvarande likhet gäller för $p+1$.

Vi har då i vänsterledet $\sum_{k=0}^p x^k$ som kan skrivas som $\frac{1-x^p}{1-x} + x^p$ enligt induktionsantagandet. Men $\frac{1-x^p}{1-x} + x^p = \frac{1-x^p}{1-x} + \frac{x^p-x^{p+1}}{1-x} = \frac{1-x^{p+1}}{1-x}$ vilket var det förväntade högerledet.

Därmed har vi visat att om likheten gäller för något naturligt tal, så gäller den även för nästa naturligt tal. Eftersom den gäller för talet 1, så gäller den för alla naturliga tal.

För att bevisa resultatet med polynomdivision kan man ställa upp polynomdivision (jag gör inte det här eftersom det är rätt krångligt i ordbehandlaren; se boken, avsnitt 7.2 och skriv ner det när du läser beskrivningen här). T.ex. kan man börja med att dividera $x^4 - 1$ med $x - 1$, och när man sett mönstret kan man skissa på divisionen av $x^n - 1$ med $x - 1$. Mönstret är att man vid steg i lägger till x^{n-i} i kvoten och därmed tar bort $x^{n-i}(x - 1)$, dvs $x^{n-i+1} - x^{n-i}$ i divisionen. Effekten är att $x^{n-i+1} - 1$ i täljaren ersätts med $x^{n-i} - 1$. Efter $n - 1$ steg är resten $x - 1$, och efter ett steg till når man det önskade resultatet: en rest på 0 och en kvot på $x^n + x^{n-1} + \dots + x^2 + x + 1$.

(4 poäng för induktionsbeviset, varav 1 för ett basfall och ett upplägg med struktur av induktionsbevis, 1p för beviset med polynomdivision. Uppgiften skulle kanske vägt ännu tyngre i en realistisk tenta.)

6. *Avgör om 39917 är ett primtal* (3p) OBS! Denna fråga är svårare än vad jag hade tänkt. Jag kan antligen ge ett mindre tal, ett tal med små faktorer, eller ge fler poäng för en sådan uppgift (som ändå kan innebära ett stort antal divisioner!)

För att testa om talet är primtal, eller faktorisera talet, kan vi behöva testa delbarhet med alla primtal upp till 200 (ty $200^2 = 40000$). Man kan börja med deförsta primtalen och se om talet är delbart med 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19. Det är inte det, så man behöver ta lite mer systematiska tag. Det systematiska är att skriva alla tal upp till 200, göra Eratosthenes såll (stryka bort alla multipler av primtalen upp till 13), så man har alla primtal man behöver. Sedan kan man testa smart...

Moniks trick för att testa smart: talets entalsiffran är 7. Det räcker inte för att avgöra delbarhet, men man kan titta vilka entalsiffror som kan multipliceras och ge en produkt med entalsiffran 7. Om man tänker på multiplikationstabellerna upp till 10 har man bara 7 och 27 som har 7 som entalsiffran. Så ett tal som delar 39917 måste ha entalsiffran 1, 7, 3 eller 9. Tittar man i sin lista och får fram att $39917 = 179 \cdot 223$.

7. *Visa att talet $\sqrt{5}$ är irrationellt.* (5p)

Se Vretblad s.69. Bevis är detsamma som för $\sqrt{2}$.

8. *Lös den diofantiska ekvationen $5x - 14y = 3$.* (3p)

Vi kollar först att det finns lösningar: $\text{SGD}(5, 14) = 1$ vilket delar högerledet, så det finns (oändligt många) lösningar.

Hitta sedan koefficienter u och v sådana att $5u - 14v = 1$: man kan genomföra Euklides algoritmen eller titta på koefficienterna och leta efter tal i deras multiplikationstabeller som skills åt med 1 (man hittar snabbt $15 = 5 \cdot 3$) och konstatera att $5 \cdot 3 - 14 \cdot 1 = 1$.

Multiplitera båda leden med 3 för att lösa ursprungsekvationen: $5 \cdot 9 - 14 \cdot 3 = 3$. Så vi har en lösning $(x_0, y_0) = (9, 3)$ och samtliga lösningar är av formen $(x_n, y_n) = (9 + 14n, 3 + 5n)$ för n ett heltal.

9. *Upprätta en multiplikationstabell för alla tal modulo 8.* (3p)

$\odot$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	0	2	4	6
3	0	3	6	1	4	7	2	5
4	0	4	0	4	0	4	0	4
5	0	5	2	7	4	1	6	3
6	0	6	4	2	0	6	4	2
7	0	7	6	5	4	3	2	1

10. Beräkna entalssiffran för talet 413^{36} . (3p)

Vi börjar med att reducera modulo 10: $413 \equiv 3 \pmod{10}$. Sedan undersöker man potenser: $3^2 \equiv -1$ ger $3^4 \equiv 1$. Så ett lätt sätt att räkna är att skriva exponenten $36 = 4 \cdot 9$ vilket ger $3^{36} \equiv (3^4)^9 \equiv 1^9 \equiv 1$. Så entalssiffran i 413^{36} är 1.

11. Räkna SGD för polynomen $f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 6x - 6$ och $g(x) = x^3 + 3x^2 - 8x + 10$.

Ange rötter och faktorisering för $f(x)$ och $g(x)$ i $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ och $\mathbb{Q}[X]$. (5p)

Jag använder Euklides algoritmen för att hitta SGD av två polynom (man kan också gissa nollställe, faktorisera polynomen och samla de gemensamma delarna, men det förutsätter att det finns "lätta" nollställen att gissa). Jag börjar med att utföra långdivision av $f(x)$ med $g(x)$. Eftersom det är krångligt att skriva ut en liggande stol i textbehandlaren, skriver jag bara resultatet här: vi får kvot $x - 5$ och rest $22x^2 - 44x + 44$, dvs

$$f(x) = (x - 5)g(x) + 22(x^2 - 2x + 2)$$

Sedan utför jag långdivision av $g(x)$ med resten (eller med $x^2 - 2x + 2$, som är ekvivalent med resten) och får kvot $x + 5$ och rest noll, dvs.

$$g(x) = (x + 5)(x^2 - 2x + 2)$$

Så $x^2 - 2x + 2$ är SGD för $f(x)$ och $g(x)$.

Vi har fått mycket information som vi kan använda för att ange faktorisering av $f(x)$ och $g(x)$. Eftersom $x^2 - 2x + 2 = (x - 1 - i)(x - 1 + i)$ (lös andragradsekvationen $x^2 - 2x + 2 = 0$ för att hitta nollställena och faktoriseringen) har vi $g(x) = (x + 5)(x^2 - 2x + 2) = (x + 5)(x - 1 - i)(x - 1 + i)$. Den sista faktoriseringen gäller i $\mathbb{C}[X]$ (rötterna är $x_1 = -5$, $x_2 = 1 + i$, $x_3 = 1 - i$) men bara $g(x) = (x + 5)(x^2 - 2x + 2)$ gäller i $\mathbb{R}[X]$ och $\mathbb{Q}[X]$ (en enda rot: $x_1 = -5$).

För att faktorisera $f(x)$ kan man dividera polynomet med $x^2 - 2x + 2$, eller använda $f(x) = (x - 5)g(x) = \{(x, |x|), x \in \mathbf{R}\} + 22(x^2 - 2x + 2) = (x - 5)(x + 5)(x^2 - 2x + 2) + 22(x^2 - 2x + 2) = ((x - 5)(x + 5) + 22)(x^2 - 2x + 2) = (x^2 - 25 + 22)(x^2 - 2x + 2) = (x^2 - 3)(x^2 - 2x + 2)$. Detta ger faktoriseringen i $\mathbb{Q}[X]$, och $f(x)$ har inga nollställen i $\mathbb{Q}$. I $\mathbb{R}[X]$ kan man gå ett steg längre: $f(x) = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x^2 - 2x + 2)$, och hitta rötterna $\sqrt{3}$ och $-\sqrt{3}$, medans i $\mathbb{C}[X]$ gäller även $f(x) = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x - 1 - i)(x - 1 + i)$, med rötterna $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$, $1 + i$, $1 - i$.

12. Lös ekvationen $z^3 = 4(1 - i\sqrt{3})$ både algebraiskt och grafiskt (med "grafiskt" menar jag att du ritar lösningarna i det komplexa planet och förklara hur man ser att just dessa punkter uppfyller ekvationen). (5p)

Jag skriver först z^3 i polar form för att kunna lösa ekvationen algebraiskt: Jag känner igen $1 - i\sqrt{3} = 2 \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} = 2e^{-i\pi/3}$. Så $z^3 = 4(1 - i\sqrt{3}) = 8e^{-i\pi/3}$

Man kan istället räkna ut absolutbelopp och argument för z^3 : $|z^3| = \sqrt{4^2 + 4^2 \cdot 3} = \sqrt{4^2 \cdot 4} = \sqrt{4^3} = 2^3 = 8$ och $\arg(z^3) = \arctan(-\sqrt{3}) = -\pi/3$.

OBS! Det hjälper att samtidigt rita ut z^3 i planet, så man inte gör misstaget $\arg(z^3) = \arccos(1/2) = \pi/3$. Båda vinklar $\pi/3$ och $-\pi/3$ har cosinus lika med $1/2$.

Nu har jag fått fram ett bra uttryck för z^3 , men det är egentligen z jag är intresserad av, som har absolutbelopp tredje roten av absolutbeloppet för z^3 , och argument en tredjedel av argumentet för z^3 , eller det plus multipler av $2\pi/3$. Jag får $z_0 = 2e^{-\pi/9}$, $z_1 = 2e^{-\pi/9+2\pi/3}$, $z_2 = 2e^{-\pi/9+4\pi/3}$, dvs $z_0 = 2e^{-\pi/9}$, $z_1 = 2e^{5\pi/9}$, $z_2 = 2e^{11\pi/9}$. (Det går lika bra att skriva $z_k = 2(\cos(-\pi/9 + 2k\pi/3) + i\sin(-\pi/9 + 2k\pi/3))$ för $k = 0, 1, 2$ och räkna ut vinklarna).

Figuren ritas jag inte här med ordbehandlaren, men man börjar med att rita ut z^3 i planet, tack vara koordinaterna $(4, -4\sqrt{3})$. Har man räknat ut absolutbelopp, så vet man att lösningarna z_k ligger på en cirkel med radie 2 och centrum i origo. Där kan man rita ut z_0 , med argument en tredjedel av z^3 s argument, och sedan de andra två lösningarna, som ligger på samma cirkel, med vinkel $2\pi/3$ mellan varje par av lösningar.

- **VG-frågor:** Frågorna ger 5p var. Tentan innehåller VG-frågor motsvarande 10p Bonuspoäng (1 till 3) från funktionsfilmen räknas här.

1. *Finns det heltal n sådana att 21 delar $n^8 + 3n^2 + 1$? Vilka är de i så fall?*
Eftersom $21 = 3 \cdot 7$ och 3 och 7 är relativt prima räcker det att hitta de n sådana att 3 och 7 delar uttrycket i uppgiften.
Vi räknar modulo 7. Vi har då att 7 delar värdet av uttrycket precis när $n^8 + 3n^2 + 1 \equiv 0 \pmod{7}$.
Man kan räkna eller använda Fermats lilla sats och se att $n^7 \equiv n \pmod{7}$ för alla rester n . Detta ger $0 \equiv n^8 + 3n^2 + 1 \equiv n \cdot n + 3n^2 + 1 \equiv 4n^2 + 1 \pmod{7}$ Vi gör en tabell: med alla tal, deras kvadrater, och $4n^2$ och ser att $4n^2$ aldrig är kongruent med -1 modulo 7
Vi ser då att $n^8 + 3n^2 + 1$ aldrig är delbart med 7 och därför heller inte med 21.
2. *Bevisa att om p är ett primtal som delar produkten $a \cdot b$, så måste p dela minst ett av heltalen a och b . Om $p \mid a$ är saken klar. Annars är $\text{SGD}(a, p) = 1$, eftersom p är ett primtal. Men största gemensamma delaren kan skrivas som en kombination av de två talen, så det finns heltal x och y så att $1 = xa + yp$. Multiplikation med b ger nu $b = xab + ypb$. Räkning modulo p ger nu (eftersom $p \mid ab$) att $b \equiv 0 + 0 \pmod{p}$. Detta visar att $p \mid b$. (Finns med i Vretblad, som Lemma 2.14.)*
3. *Ge exempel på polynom av grad 4 i $\mathbf{Q}[X]$ med*
 - (a) 4 nollställen i $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ och $\mathbf{C}$: $x(x-1)(x-2)(x-3)$
 - (b) 2 nollställe i $\mathbf{Q}$ men 4 nollställen i $\mathbf{R}$ och $\mathbf{C}$: $x(x-1)(x^2-2)$
 - (c) 2 nollställen i $\mathbf{Q}$ och $\mathbf{R}$ men 4 nollställen i $\mathbf{C}$: $x(x-1)(x^2+1)$
 - (d) 1 nollställe i $\mathbf{Q}$, 2 nollställen i $\mathbf{R}$ och 4 nollställen i $\mathbf{C}$. Finns inte: de reella lösningarna kommer i par (tänk på roten i pq-formeln). En kvadratisk ekvation kan inte ha en rationell och en icke-rationell rot.
4. *Låt $z = 1 - i$ vara ett komplext tal.*
 - (a) Skriv z på polär form.

(b) Rita z i det komplexa talplanet och förklara hur potenser z^n kan ligga för olika naturliga tal n .

(c) Skriv z^{99} på både polär form och på formen $a + bi$ där a och b är explicit angivna (innehåller inte några trigonometriska funktioner).

(a) Absolutbeloppet för z är $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ och argumentet är t.ex. $-\pi/4$ eller $7\pi/4$. Därmed blir z på polär form:

$$z = \sqrt{2} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right].$$

(c) Vi får från de Moivres formel att

$$z^{99} = (\sqrt{2})^{99} \left[\cos \left(-\frac{99\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{99\pi}{4} \right) \right].$$

Vi har att

$$-\frac{99\pi}{4} = -26\pi + \frac{5\pi}{4}, \quad \cos \left(\frac{5\pi}{4} \right) = \sin \left(\frac{5\pi}{4} \right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

och $(\sqrt{2})^{99} = 2^{49}\sqrt{2}$. Därmed får vi att

$$z^{99} = 2^{49}\sqrt{2} \left[\cos \left(\frac{5\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{4} \right) \right]$$

på polär form och

$$z^{99} = -2^{49} - 2^{49}i$$

på formen $a+bi$.