Föreläsning XI

Mer om generaliserad integral

Ex 64: Givet $h(x) = \left(x^2 - 5x + 2\right) e^{-x/2}$.

(a) Bestäm en p.f. till $h(x)$.

(b) Beräkna $\displaystyle\int_0^\infty h(x)dx$.

(a) **Lösning:**
Vi har här en integrand som är en produkt av ett polynom av grad 2 och en exponentialfunktion. Vi kan använda P.I. för att beräkna en primitiv funktion.
Tidigare har vi beräknat

$$\int (x-2)e^{-x/2}dx = \{\text{P.I.}\} = -2xe^{-x/2} + C.$$

Vi *deriverar* polynomet $x - 2 =: g(x)$ i integralen i HL vid P.I. Detta resulterar i att den primitiva funktionen har ett polynom $(= -2x)$, som faktor av *samma* gradtal som polynomet faktorn$(x-2)$ i integranden.
Det är lätt att övertyga sig om, att en primitiv funktion till $h(x)$ är ånyo en produkt mellan ett polynom $Ax^2 + Bx + C$ och $e^{-x/2}$.
Man kan då *ansätta* en p.f. som

$$(Ax^2 + Bx + C) \cdot e^{-x/2}.$$

För att bestämma koefficienterna A, B och C, skriver vi upp sambandet med integralen:

$$\int \left(x^2 - 5x + 2\right) e^{-x/2}dx = (Ax^2 + Bx + C)e^{-x/2} + C_1.$$

Därefter deriveras båda led:

$$\begin{array}{ccc} \text{VL} & & \text{HL} \\ \hline \left(x^2 - 5x + 2\right) e^{-x/2} & = & \left[(Ax^2 + Bx + C)\left(-\frac{1}{2}\right) + 2Ax + B\right] e^{-x/2}. \end{array}$$

Nu är VL och HL *identiska* (som vid PBU) och således är koefficienterna lika.

$$\begin{array}{r|ccl} & \text{VL} & & \text{HL} \\ \hline x^2: & 1 & = & -\frac{1}{2}A \\ x^1: & -5 & = & -\frac{1}{2}B + 2A \\ x^0: & 2 & = & -\frac{1}{2}C + B \end{array} \iff \begin{cases} A = -2 \\ B = 2 \\ C = 0 \end{cases}$$

Svar: En p.f. är $2x(1-x)e^{-x/2}$.

(b) **Lösning:**

För att beräkna $\int_0^\infty h(x)dx$, använder vi givetvis den p.f. som vi har i (a).

$\int_0^\infty h(x)dx = \lim_{b\to\infty}[2x(1-x)e^{-x/2}]_0^b = \lim_{b\to\infty}(2b(1-b)e^{-b/2}-2\cdot 0\cdot(1-0)e^{-0/2}) = 0-0 = 0.$

Att gränsvärdet

$$\lim_{b\to\infty} 2b(1-b)e^{-b/2} \equiv \lim_{b\to\infty} \frac{2b(1-b)}{e^{b/2}} = 0$$

beror på att exponentalfunktonen $e^{b/2}$ går mot ∞ snabbare än varje potensfunktion (Standardgränsvärde).

Sats:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^a}\,dx$$

är konvergent omm $a < 1$ och

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^a}\,dx$$

är konvergent omm $a > 1$.

Bevis:

Om $\alpha = 1$ får vi, för $a > 0$, integralen

$$\int_a^1 \frac{1}{x}\,dx = \ln 1 - \ln a$$

Som divergerar (mot ∞) eftersom $\ln a \to -\infty$ då $a \to 0_+$.
Dessutom får vi

$$\int_1^b \frac{1}{x}\,dx = \ln b - \ln 1 \to \infty \text{ då } b \to \infty.$$

För $\alpha \neq 1$ är en primitiv funktion $\frac{1}{1-\alpha}\,x^{1-\alpha}$.

$$\int_a^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{1-\alpha}\cdot 1^{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\,a^{1-\alpha}.$$

Om $\alpha < 1$ är $1-\alpha > 0$, så att

$$\frac{1}{1-\alpha}\,a^{1-\alpha} \to 0 \text{ då } a \to 0_+, \quad \text{alltså konvergent.}$$

Om $\alpha > 1$ är $1-\alpha < 0$, så att

$$\frac{1}{1-\alpha}\,a^{1-\alpha} \to -\infty \text{ då } a \to 0_+, \quad \text{alltså divergent.}$$

Beviset i fallet $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx$ görs på liknande sätt.

Integral: Beräkning av längd, area och volym

Att beräkna volymen av en del kroppar klarar man med endimensionell analys. Vi har två metoder, **Skivmetoden** och **Skalmetoden**.

Ex 65: Beräkna volymen av en ellipsoid(-kroppen) med halvaxlar a, b och c.

Lösning:

Ellipsoidens yta kan skrivas med ekvationen

$$(x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 = 1. \tag{1}$$

Vi skivar upp ellipsoiden i cylindrar med tjocklek dx och area $A(x)$. En sådan cylinder har då volymen

$$dV = A(x)dx.$$

Hur stor är $A(x)$ för $-a \leq x \leq a$? Vi utgår från att en ellips med halvaxlar α och β och medelpunkt i $(0,0)$ kan skrivas

$$(y/\alpha)^2 + (z/\beta)^2 = 1 \text{ och har area } \pi\alpha\beta.$$

För fixt x beskriver (1) en ellips. Det ser vi om vi flyttar över $(x/a)^2$ till HL och får

$$(y/b)^2 + (z/c)^2 = 1 - (x/a)^2 =: h(x).$$

Genom att dividera båda led med $h(x)$ erhålls

$$\frac{y^2}{(b \cdot \sqrt{h(x)})^2} + \frac{z^2}{(c \cdot \sqrt{h(x)})^2} = 1$$

alltså en ellips med halvaxlar

$$b \cdot \sqrt{h(x)} \text{ och } c \cdot \sqrt{h(x)}.$$

Motsvarande Ellipskivas area $A(x)$ är

$$A(x) = \pi b \cdot \sqrt{h(x)} \cdot c \cdot \sqrt{h(x)} = \pi bc(1 - (x/a)^2).$$

Ellipsoidkroppens volym V_0 fås med följande integral

$$\begin{aligned} V_0 &= \int_{-a}^{a} \pi bc(1 - (x/a)^2)dx = \{\text{Jämn integrand}\} = 2\pi bc \int_0^a (1 - (x^2/a^2))dx = \\ &= 2\pi bc \left[x - \frac{x^3}{3a^2}\right]_0^a = 2\pi bc \cdot \left[a - \frac{a^3}{3a^2}\right] = \frac{4\pi abc}{3}. \end{aligned}$$

Kommentarer:

- För $a = b = c = r$ är ellipsoiden en sfär som innesluter klotet med volym $V_0 = \dfrac{4\pi r^3}{3}$.
- Motsvarande sfärs area är $S_0 := V_0'(r) = \dfrac{d}{dr}\dfrac{4\pi r^3}{3} = 4\pi r^2$.

– Det finns inget enkelt exakt uttryck för arean av en ellipsoids yta.

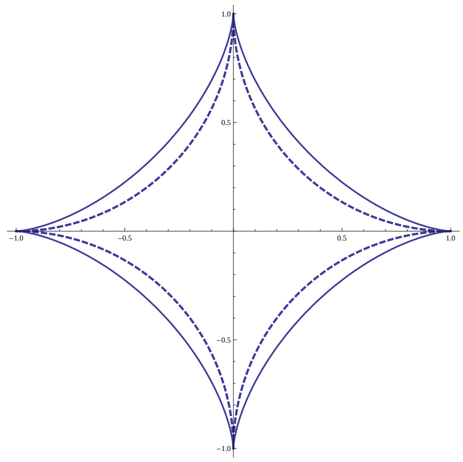
Ex 66: (a) Rita och beräkna aeran av ytan som begränsas av kurvan,
(b) samt beräkna längden av kurvan given av $(x, y) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Lösning:

En kurva där x och y är funktioner av (ytterligare) en variabel beror på *parametern* t är en kurva på parameterform.
Vi ser att kurvan går genom punkterna $(x, y) = (\pm 1, 0)$ och $(x, y) = (0, \pm 1)$. Det är här möjligt att uttrycka y som en funktion av x i övre halvplanet. Men vi beräknar derivatan $y'(x)$ genom följande.

$$y'(x) = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3\cos t \sin^2 t}{-3 \sin t \cos^2 t} = -\tan t.$$

Speciellt i punkten $(1, 0)$, som motsvarar $t = 0$ (och $t = 2\pi$) är $y' = 0$. För $t = \pi/2$ är $y' = \pm\infty$ och för $0 < t < \pi/2$ är $y' < 0$. Av symmetriskt ser kurvan ”likadan” ut i alla fyra kvadranterna. En skiss av kurvan är som nedan.



Astroid. Den streckade kurvan består av fyra kvartscirklar. Det framgår att astroidens längd är mindre än enhetscirkelns längd.

(a) Arean A som begränsas av kurvan.

$$\begin{aligned}
A &= 4\int_{x=0}^{1} y\,dx = \left\{ \text{V.S.} \begin{array}{l} x=\cos^3 t \Rightarrow dx = 3\cos^2 t(-\sin t)dt \\ 0\le x\le 1 \Longleftrightarrow \pi/2 \ge t \ge 0 \end{array} \right\} = \\
&= 12\int_0^{\pi/2} \sin^4 t\cos^2 t dt = \{\text{Symmetri}\} = 12\int_0^{\pi/2} \sin^2 t\cos^4 t dt \\
\Longleftrightarrow \ & 2A = 12\int_0^{\pi/2} [\sin^4 t\cos^2 t + \sin^2 t\cos^4] t dt = 12\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\sin^2 t dt = \\
&= 3\int_0^{\pi/2} \sin^2 2t\,dt = \frac{3}{2}\int_0^{\pi/2} (1-\cos 2t)dt = \frac{2\pi}{4} \\
\Longleftrightarrow \ & A = \frac{3\pi}{8} \text{ (Svar).}
\end{aligned}$$

(b) Kurvans längd är

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{9\sin^2 t\cos^4 t + 9\sin^4 t\cos^2 t}\,dt = \\
&= 3\int_0^{2\pi} \sqrt{(\cos t\sin t)^2} dt = 3\int_0^{2\pi} |\cos t\sin t| dt = 3\cdot 4\int_0^{\pi/2} \cos t\sin t dt = \\
&= 6\int_0^{\pi/2} \sin 2t\,dt = 6\cdot\frac{1}{2}[\cos 2t]_0^{\pi/2} = 6.
\end{aligned}$$

Svar (b): Längden på kurvan är 6 l.e.

Kommentarer:

* Vi ser att beräkningarna underlättas genom användning av symmetri.
* Kurvan kallas *astroid*.
* Längden på kurvan är alltså 6 l.e. Längden på enhetscirkeln är $2\pi \approx 6.28$ alltså lite längre. Detta visar att astroiden inte är fyra kvartscirklar som är vända inåt.

Ex 67: Vi betraktar nu kurvan $y = g(x) = x\sqrt{x+2}$, $-2 \le x \le 2$. Den begränsar en yta, tillsammans med $x-$axeln ($y=0$) i talplanet som delvis ligger under $x-$axeln.
Ytan roterar kring $x-$axeln och genererar på så sätt en (rotations-)kropp. Dess volym kan vi beräkna med skivmetoden.

$$A(x) = \pi[f(x)]^2 = \pi f(x)^2.$$

Volymen är alltså

$$V_0 = \pi\int_{-2}^{2} x^2(x+2)dx = 4\pi\int_0^2 x^2 dx = \frac{4\pi}{3}\cdot 2^3 = \frac{32\pi}{3} \text{ v.e.}$$

Ex 68: Kurvan $y = f(x) = e^x$, $y = 0$, $x = 0$ samt $x = 1$ begränsar en yta i talplanet.

(a) Ytan roterar kring $x-$axeln och genererar en kropp med volym V_0. Beräkna volymen.

(b) Ytan roterar kring $y-$axeln och genererar en kropp med volym V_1. Beräkna volymen.

Lösning:

(a)

$$V_0 = \pi \int_0^1 f(x)^2 dx = \pi \left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 = e^2 - 1.$$

(b) Vi ser att kroppen i detta fall är "en cylinder minus en skål". Cylinderns volym

$$V_{11} = \pi \cdot 1^2 \cdot e = \pi \cdot e.$$

Skålens volym får vi genom att se den som en rotationskropp runt $y-$axeln:

$$\text{funkion:} \quad x = f^{-1}(y) = \ln y$$

$x-$ gränser:	$0, \quad 1$
$x-$ gränser:	$1, \quad e$

Motsvarande volym är

$$\begin{aligned} V_{12} &= \pi \int_1^e (\ln y)^2 dy = \{\text{P.I.}\} = \pi[y(\ln y)^2]_1^e - \pi \int_1^e y \cdot 2 \ln y \cdot \frac{1}{y}\, dy = \\ &= \pi(e - 2[y \ln y - y]_1^e) = \pi e - 2\pi. \end{aligned}$$

$$V_1 = V_{11} - V_{12} = \pi \cdot e - (\pi e - 2\pi) = 2\pi \text{ (v.e.) (Svar)}$$

Ex 69: Beräkna tyngdpunktens för en homogen, rät cirkulär kon.

Lösning:

Vi ser cylindern genererad av ytan $y = kx$, $0 \leq x \leq h$. Då är h konens höjd. k=r/h, där r är radien. Tyngdpunkten ligger på $x-$axeln. Den beräknas som

$$x_T = \frac{\int x dm}{\int dm}$$

där dm är en infinitesimal massa, massan av en cylinderskiva med bredd dx. Låt ρ var den konstanta densiteten. Då är $V = V(x) = \dfrac{(rx/h)^2 x}{3}$, volymen mellan $x = 0$ och $x = x$. Det ger

$$dm = \rho\, dV \text{ och } dV = \frac{3r^2x^2}{h^2}\, dx$$

Alltså är täljaren

$$\int x\, dm = \pi \frac{\rho r^2}{h^2} \int_0^h x^3 dx = \pi \rho r^2 \frac{h^2}{4}$$

och nämnaren

$$\int 1\,dm = \pi\frac{\rho r^2}{h^2}\int_0^h x^2 dx = \pi\rho r^2\frac{h^1}{3}.$$

Tyngdpunktens $x-$koordinat är således

$$x_T = \frac{\pi\rho r^2\frac{h^2}{4}}{\pi\rho r^2\frac{h^1}{3}} = \frac{3}{4}\,h.$$

Tyngdpunken är alltså belägen 1/4 av höjden räknat från basen.