Föreläsning III, 20170328

Gränsvärde och kontinuitet forts

1. **Skrivsätt för gränsvärde**

$$fx) \longrightarrow A \text{ om } x \to a \text{ eller } \lim_{x\to a} f(x) = A.$$

" $\longrightarrow$ " läses "går mot". Om $A = -\infty$ eller $+\infty$ brukar man inte skriva "lim".

A kallas då ett *oegentligt gränsvärde*.

Absolutbelopp: *Triangelolikheten* för reella tal a och b säger att

$$|a+b| \leq |a| + |b|. \tag{1}$$

Sats Om $f(x) \longrightarrow A$, $g(x) \longrightarrow B$, då $x \to a$, så gäller

$$f(x) + g(x) \longrightarrow A + B.$$

Bevis

Tag godt. $\varepsilon > 0$. Då finns $\delta_1 > 0$ och $\delta_2 > 0$ sådana att om $|x-a| < \delta_1$ och $|x-a| < \delta_2$ så är

$$|f(x) - A| < \varepsilon/2 \text{ och } |g(x) - B| < \varepsilon/2.$$

Sätt $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ och antag $|x-a| < \delta$. Då gäller att

$$\varepsilon = \varepsilon/2 + \varepsilon/2 > |f(x) - A| + |g(x) - B| \geq |(f(x) + g(x)) - (A + B)|$$

och beviset är klart.

Kommentar: Övriga räkneregler kan också visas med $\varepsilon - \delta$ definitionen.

Ex 1.15 Beräkna asymptoter för $f(x) = \sqrt{4x^2 + x}$.

Lösning

$$F_f = \{x : x \leq -1/4 \vee x \geq 0\}.$$

Inga lodräta asympoter (d.v.s. av typ $x = a$).
Sneda asymptoter. De har formen $(y =)kx + m$. Per definition gäller

$$f(x) - (kx + m) \to 0 \text{ då } x \to -\infty \quad (*)$$

och p.s.s. för $x \to \infty$.
Dividera $(*)$ med x. Då får vi i fallet $x \to \infty$

$$\frac{f(x)}{x} - k - \frac{m}{x} \to \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} - k - 0 = 0$$

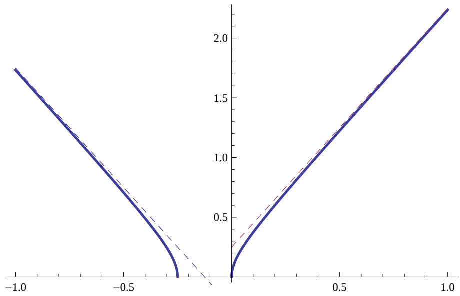
d.v.s. $k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ (P.s.s. i fallet $x \to -\infty$). Vi får i fallet $x \to \infty$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{|x|\sqrt{4 + 1/x}}{x} = \sqrt{4 + 1/x} = 2.$$

Nu återstår m ges av (om först $x \to \infty$)

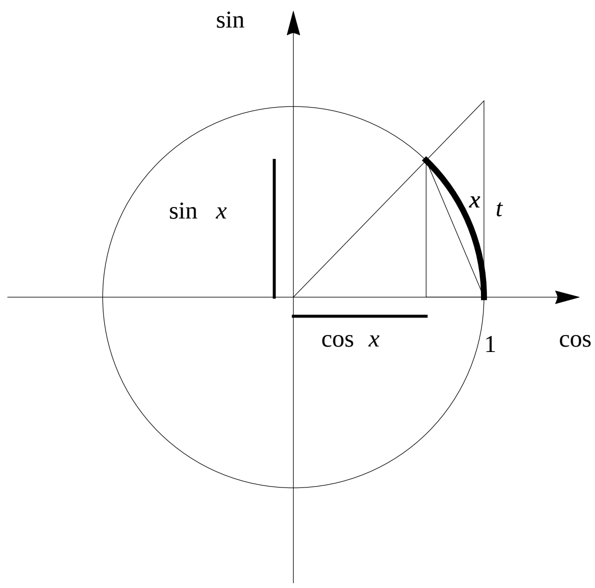
$$
\begin{aligned}
m &= \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} [x\sqrt{4 + 1/x} - 2x] \,(**) = \\
&= \{\text{Förläng m. konj.}\} = \lim_{x\to\infty} x \cdot \frac{(4 + 1/x) - 2^2}{\sqrt{4 + 1/x} + 2} = \\
&= \lim_{x\to\infty} x \cdot \frac{(\cancel{4} + 1/x) - \cancel{2}^2}{\sqrt{4 + 1/x} + 2} = \lim_{x\to\infty} x \cdot \frac{1/x}{\sqrt{4 + 1/x} + 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{4 + 1/x} + 2} \longrightarrow \\
& \quad \frac{1}{4} = m.
\end{aligned}
$$

Sned asymptot då $x \to \infty$ är $y = 2x + 1/4$. Med motsvarande räkningar får vi asymptoten $y = -2x - 1/4$, då $x \to -\infty$.



Kommentarer I $(**)$ går de två termerna $x\sqrt{4 + 1/x}$ och $2x$ mot ∞. Man talar då om ett gränsvärde av typ ∞ minus ∞.

- Man bör undvika att skriva "lim" och endast skriva *om* det aktuella uttrycket.
- **Ett viktigt gränsvärde för trigonometrin**



I figuren har vi följande ytor med dito areor.

	Area
Liten triangel	$\frac{1 \cdot \sin x}{2}$
Cirkelsektor	$\frac{1^2 \cdot x}{2}$
Stor triangel	$\frac{1 \cdot t}{2}$

För att bestämma t använder vi oss av likformighet hos liten och stor rätvinklig triangel:

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{t}{1}. \text{ Alltså är } t = \tan x.$$

Åter till olikheterna

$$\sin x \le x \le \tan x \begin{cases} \sin x \le x \Longleftrightarrow \dfrac{\sin x}{x} \le 1 \\ \\ x \le \tan x \Longleftrightarrow \cos x \le \dfrac{\sin x}{x}. \end{cases}$$

d.v.s.

$$\cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1.$$

Vi antar nu att vi vet att $\cos x$ är kontinuerlig. Då gäller att $\cos x \longrightarrow \cos 0 = 1$, då $x \to 0$. Låt $x \to 0_+$. *Instängningslagen* ger att

$$\frac{\sin x}{x} \to 1 \text{ då } x \to 0_+. \tag{2}$$

Beviset för $x \to 0_-$ görs p.s.s.

Ex 1.16 Beräkna gränsvärdet $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x \tan x}$.

Lösning

Vi ser att både täljare och nämnare $= 0$, om $x = 0$.
Gränsvärdet är då av typ "$\frac{0}{0}$".
Vi skall använda oss av (2) (som gäller även för $x \to 0_-$).
Täljaren $= 2\sin^2(x/2)$ (Trig. ident.). Vi får uttrycket

$$\frac{1-\cos x}{x \tan x} = \frac{2[\sin(x/2)]^2}{x \sin x} \cdot \cos x = \cos x \left[\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right]^2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} \to \frac{1}{2} \text{ då } x \to 0.$$

Svar: Gränsvärdet är $\frac{1}{2}$.

- (Mer om gränsvärde) Vi drar slutsatsen att

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0, \text{ omm } \alpha > 0.$$

- **Ett vikigt gränsvärde för exponentialfunktion**
  Det speciella med talet $e = 2.71828...$ är att det är den exponentialfunktion, som har tangenten $y = 1 \cdot x + 1$ i punkten $(x, y) = (0, 1)$. Via derivata får man sedan talet e.

Ex 1.17 Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to -\infty} (\sqrt{x^2 + x} + x).$$

Lösning

Gränvärdet är av typ "∞ minus ∞".
Vi gör följande algebraiska omskrivning med konjugatregeln (Obs! Vi antar att $x < 0$.)

$$\sqrt{x^2+x} + x = \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2+x} - x} = \frac{x}{|x|(\sqrt{1+1/x} - \underbrace{x/|x|}_{=-1})} = -\frac{1}{\sqrt{1+1/x}+1}.$$

Låt nu $x \longrightarrow -\infty$. Då får vi gränsvärdet

$$-\frac{1}{2} \text{ (Svar)}.$$

Talet e grafen till exponentialfunktionen $f(x) = e^x$, d.v.s. kurvan $y = e^x$ har en tangent i punkten $(x_0, y_0) = (0, 1)$ $(e^0 = 1)$. Tangentens *riktningskoefficient är* $= 1$. Centralt är gränsvärdet

$$\lim_{n \to \pm\infty} \left[1 + \frac{1}{n}\right]^n = e. \tag{3}$$

Ex 1.18 Beräkna

$$\lim_{x \to 0_+} (1 - 2x)^{3/x}.$$

Lösning

Byt $-2x = 1/n$ i uttrycket, d.v.s. $3n = -\dfrac{3}{2x}$. Det blir

$$(1 + 1/n)^{-6n} = \{\text{Likna (3)!}\} = [(1 + 1/n)^n]^{-6} \longrightarrow e^{-6}.$$

då $n \longrightarrow -\infty$.
Svar: Gränsvärdet är e^{-6}.