1 Föreläsning V

1.1 Mer gränsvärde

Ex 1.23 Låt $r(x) = \dfrac{6x^2+5x+1}{-12x^2-13x-3}$, en *rationell funktion*. Beräkna gränvärdena

(a)
$$\lim_{x\to\infty} r(x)$$

(b)
$$\lim_{x\to -1/3} r(x)$$

Lösning:

(a) Dividera med nämnarens högstagradsterm i både tälj. och nämn.

$$r(x) = \frac{6x^2+5x+1}{-12x^2-13x-3}\cdot\frac{1/x^2}{1/x^2} = -\frac{6+5/x+1/x^2}{12+13/x+3/x^2} \longrightarrow -\frac{1}{2} \text{ då } x\to\infty.$$

(b) Vi ser att både tälj. och nämn. $=0$ om $x=-1/3$. Det betyder att $x+1/3$ är faktor till båda. Vi får, via Faktorsatsen

$$r(x) = \frac{(3x+1)(2x+1)}{-(3x+1)(4x+3)} = -\frac{2x+1}{4x+3} \longrightarrow -\frac{2(-1/3)+1}{4(-1/3)+3} = ... = -\frac{1}{5}.$$

Sats Antag att $f(x) = a_m x^m + ... + a_0$ och $g(x) = b_n x^n + ... + b_0$ är polynom i variabeln x av grad m resp. n och $r(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

$$\text{grad}\, f = \text{grad}\, g \text{ d.v.s. } m=n \qquad \lim_{x\to\pm\infty} r(x) = a_n/b_n$$

$$\text{grad}\, f < \text{grad}\, g \qquad \lim_{x\to\pm\infty} r(x) = 0$$

$$\text{grad}\, f > \text{grad}\, g \qquad \lim_{x\to\pm\infty} r(x) \text{ existerar ej.}$$

- Några speciella gränvärden: Jämförelse mellan potens- och exponentialfunktion och loagaritm- och potensfunktion, då $x \longrightarrow \infty$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^b}{a^x} = 0 \quad \text{om} \quad a>1$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)^c}{x^b} = 0 \quad \text{om} \quad b>0$$

1.2 Derivata

Derivatan av en funktion $f(x)$ i punkten $(x,y) = (x, f(x))$ är riktningskoefficienten för tangenten till kurvan $y=f(x)$ i den punkten.

- För att derivera ritar man först en tangent, som har en punkt $(x, f(x))$ och en annan punkt på samma kurva $(x+h, f(x+h))$. Riktningskoefficienten för *sekanten*, linjen genom de två punkterna är

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

och för att få *tangentens* riktningskoefficient låter man $h \to 0$.

- Vi deriverar först $f(x) = e^x$ och utgår ifrån att

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

Nu tar vi och deriverar $f(x) = e^x$:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{e^{x+h}-e^x}{h} = e^x \cdot \frac{e^h-1}{h} \to e^x \text{ då } h \to 0.$$

Derivatan av $f(x) = e^x$ är alltså $e^x =: f'(x) =: D\,f(x)$.

Mer om talet e Vi har ett antal gränsvärden med talet e.

$\lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = 1$	Sätt $h = \ln(x+1):\ h \to 0 \iff x \to 0$
$\frac{e^h-1}{h} = \frac{x}{\ln(x+1)} \to 1$	då $x \to 0$ och
$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$	Sätt $1/x = n$:
$n\ln(1+1/n) = \ln\left[(1+1/n)^n\right] \to 1$	då $n \to \pm\infty \Longrightarrow$
$[1+1/n]^n \to e$ då $n \to \pm\infty$.	

Def. av derivata

> **Definition**
> Om gränsvärdet
> $$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{1}$$
> existerar, är $f(x)$ deriverbar i x. Gränsvärdet (1) kallas derivatan av f och skrivs
> $$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = D\,f(x).$$

- Derivata av monom $m(x) = x^n$ för $n = 0, 1, 2, ...$ Då kan man ta till den allmänna konjugatregeln

$$\frac{m(x+h)-m(x)}{h} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \{a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$\frac{(x+h-x)[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}\cdot x + (x+h)^{n-3}\cdot x^2 + ... + (x+h)^1 x^{n-2} + h^{n-1}]}{h} =$$

$$\underbrace{[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}\cdot x + (x+h)^{n-3}\cdot x^2 + ... + (x+h)^1 x^{n-2} + x^{n-1}]}_{n \text{ termer}} \longrightarrow$$

$$x^{n-1} + x^{n-1} + ... + x^{n-1} = nx^{n-1}$$

Ex 1.24 (Derivata av x^n där $n < 0$.)

$$f(x) = 1/x, \quad \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\frac{x-(x+h)}{(x+h)x}}{h} = -\frac{1}{x(x+h)} \to -\frac{1}{x^2}$$

då $h \to 0$.

- Lite om derivata och differentierbarhet
  För att enkelt derivera kan man differentiera. Antag att f är deriverbar i x. Då gäller att det finns ett reellt A

  $$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - A =: \rho(h) \to 0 \text{ då } h \to 0.$$

  (Det är klart att $A = f'(x)$). Vi multiplicerar med h och får att

  $$f(x+h) - f(x) = Ah + h \cdot \rho(h) \text{ där } \rho(h) \to 0 \text{ då } h \to 0.$$

  Detta kallas *differentierbarhet*. Detta är ekvivalent med deriverbarhet.

- Kontinuitet $\Longleftarrow$ deriverbarhet.

  Bevis:

  Antag att $f'(x)$ existerar. Vi visar att f kont. i x och tar en punkt $x + h$ och låter punkten gå mot x, d.v.s. $h \to 0$.
  P.g.a. differentierbarheten är

  $$f(x+h) - f(x) = h \cdot (A + \rho(h)) \longrightarrow 0 \text{ då } h \to 0.$$

- Derivata av $c\,f(x)$ och $f(x) + g(x)$, där man antar att $f(x)$ och $g(x)$ deriverbara. Detta bevis lämnas som övning.

- Derivata av produkt $f(x)g(x)$. Antag att f och g är deriverbara i x. Då är fg det också och dess derivata ges av

  $$\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \frac{[f(x+h) - f(x)]g(x+h) + f(x)[g(x+h) - g(x)]}{h} =$$

  $$\frac{[Ah + h\rho_1(h)]g(x+h) + f(x)[Bh + h\rho_2(h)]}{h} = A \cdot g(x+h) + f(x) \cdot B + \rho_1(h) + \rho_2(h)$$

- **Derivata av sammansatt funktion**
  Antagandet är att $g = g(x) = z$ deriverbar i x och $f = f(g(x)) = f(z)$ deriverbar i z. Vi utnyttjar det ekvivalenta villkoret differentierbarhet.

  $$\begin{cases} g(x+h) - g(x) = h(A + \rho_1(h)) \\ \\ f(z+k) - f(z) = k(B + k\rho_2(k)) \\ z = g(x) \end{cases} \Longrightarrow$$

  $$\frac{f(g(x+h)) - f(g(x)}{h} = \frac{f(g(x) + \overbrace{h(A + \rho_1(h))}^{k :=}) - f(g(x))}{h} = \frac{f(z+k) - f(z)}{h} =$$

  $$\frac{k(B + k\rho_2(k))}{h} = = \frac{h(A + \rho_1(h))(B + k\rho_2(k))}{h} =$$

  $$(A + \rho_1(h))(B + k\rho_2(k)).$$

Vi iakttar att $h \to 0$ medför att $k = h(A + \rho_1(h) \to 0$. Vi får alltså gränsvärdet $A \cdot B$. Men $A = g'(x)$ och $B = f'(z) = f'(g(x))$.

Vi bevisat att $f(g(x))$ är deriverbar med derivata $\dfrac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

- Derivata av $\cos x$: Sätt $h = 2\delta$ och det följer att $h \to 0 \iff \delta \to 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{\cos(x+2\delta) - \cos x}{2\delta} &= \frac{\cos((x+\delta)+\delta) - \cos((x+\delta)-\delta)}{2\delta} = \\
&= \frac{\cos(x+\delta)\cdot\cos(\delta) - \sin(x+\delta)\sin\delta}{2\delta} - \\
&- \frac{\cos(x+\delta)\cdot\cos\delta + \sin(x+\delta)\sin\delta}{2\delta} = \\
&= -\frac{2\sin(x+\delta)\sin\delta}{2\delta} = -\sin(x+\delta)\cdot\frac{\sin\delta}{\delta} \longrightarrow -1\cdot\cos x = -\cos x
\end{aligned}$$

då $\delta \to 0$.

- Derivata av $\sin x = \cos(\pi/2 - x)$:

$$D \sin x = (-1) \cdot (-\sin(\pi/2 - x)) = \cos x.$$

- Derivata av kvot:

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{g(x)} = \{\text{ Yttre fktion } f(z) = 1/z\} = -\frac{1}{z^2} \cdot g'(x) = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

$$D\frac{f(x)}{g(x)} = D\left[f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right] = f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)} - f(x)\cdot\frac{g'(x)}{[g(x)]^2} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

$$D\tan x = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \begin{cases} \{\text{dels}\} = \dfrac{1}{\cos^2 x} \\ \\ \{\text{ och dels}\} = 1 + \tan^2 x \end{cases}$$

Ex 1.25

$$\begin{aligned}
D2^x &= De^{x\ln 2} = e^{x \ln 2} \cdot \ln 2 = 2^x \ln 2. \\
D(2x^2+1)^3 &= 3(2x^2+1)^2 \cdot 4x \\
D(\sin^2 x) &= 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x \\
D(\ln(2x)) &= \frac{1}{2x} \cdot 2 = \frac{1}{x} \\
D\sqrt{x^2+1} &= \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}
\end{aligned}$$

- Derivata av x^n då $n = -1, -2, \ldots$. Vi har redan deriverat x^{-1} och x^n för $n = 0, 1, 2\ldots$. Se nu, för $n = -1, -2, \ldots$ som en sammmansatt funktion

$$x^n = \left(x^{-1}\right)^{-n} \text{ med derivata } -n\left(x^{-1}\right)^{-n-1} \cdot (-x^{-2}) = nx^{n-1}.$$

Tolkning av derivata

- Derivatan av en funktion $f(x)$ är tangentens riktningskoefficient i punkten $(x, f(x))$
- Derivatan är ett mått på funktionens momentana förändring i samma punkt.