1 Föreläsning VI

1.1 Derivata av inversfunktioner

- Vi vet att $x = e^{\ln x}$. Genom att derivera får vi

$$1 = e^{\ln x} \cdot D\ \ln x \Leftrightarrow D\ \ln x = \frac{1}{x}.$$

Ex 1.26 Vi har att $\cos(\arccos x) = x$ och samma knep ger

$$-\sin(\arccos x) \cdot D \arccos x = 1.$$

Nu är

$$-\sin(\arccos x) = -\sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)} = -\sqrt{1 - x^2} \text{ så att } D \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Derivatan av $\arcsin x$: Observera att $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$(!)
Termvis derivering ger

$$D \arccos x + D \arcsin x = 0 \text{ d.v.s. } D \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

- Derivata av sammanstt funktion kan skrivas (med $g(x) = z$)

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = \frac{df}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}.$$

Detta skrivsätt kallas *kedjeregeln*.

1.2 Derivatans betydelse för funktionens graf

Ex 1.27 Funktionen $f(x) = 6x - x^2$ har växande för $x \leq 3$ och avtagande för $x \geq 3$. Vi deriverar och får $f'(x) = 6 - 2x$. $f'(x) \geq 0$ för $x \leq 3$. Och $f'(x) \leq 0$ för $x \geq 3$. Dessutom är $f'(3) = 0$. Motsvarande punkt kallas *stationär*.

De samband vi ser i exemplet gäller generellt:

$$f'(x) \geq 0 \Longrightarrow f(x) \text{ växande}$$

och

$$f'(x) > 0 \Longrightarrow f(x) \text{ strängt växande}$$

Ex 1.28 Med $g(x) = x^3$ blir $g'(x) = 3x^2 > 0$ utom för $x = 0$. Så tydligen ger derivatan att f är strängt växande.
Om $g'(x) = 0$ i isolerade punkter ändrar inte på att f strängt växande.

Def: En funktion $f(x)$ har en maxpunkt i x_0, om $f(x) \leq f(x_0)$ i en *omgivning* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ till x_0.

Ex:1.27 igen Vi ser att $f(3) \geq f(x)$ i omgivningen $(-\infty, \infty)$.

- Alltså är $(3, f(3))$ en maxpunkt.

Ex 1.28 igen För $g(x) = x^3$ ser vi att $(0, g(0)) = (0, 0)$ *inte* är en maxpkt inte heller en minpunkt. En sådan punkt kalla *terrasspunkt*.

1.3 Kurvkonstruktion

Ex1.29 Vi tar exemplet med $f(x) = x(6 - x)$. Vi vill rita kurvan och ta med intressanta punkter. Först $D_f = \mathbb{R}$ och sedan $f'(x) = 6 - 2x$. $f'(x) = 0 \iff x = 3$. För att veta var f är växande och avtagande, gör vi ett *teckenschema*:

x	$<$	3	$<$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	maxpkt $f(3) = 9$	$\searrow$

Svar: $D_f = \mathbb{R}$, lokal maxpunkt i $x = 3$ och största värde 9.

Ex 1.30 Konstruera kurvan $y = x^3 - 3x + 2$.

Lösning

Funktionen $p(x) := x^3 - 3x + 2$ har $D_p = \mathbb{R}$. Det är ett polynom av grad > 1, så det finns inga asymptoter. Stationära punkter:

$$p'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \iff x = \pm 1$$

Teckenschema

x	$<$	-1	$<$	1	$<$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

Funktionen har lokal maxpunkt $(-1, 4)$ och lokal minpunkt (1.0).
$V_p = \mathbb{R}$.

Ex 1.31 Konstruera kurvan $h(x) = \sqrt{x^2 + 1/x^2}$.

Lösning

- $D_h = \{x : x \neq 0\}$.
- Lodrät asymptot $x = 0$.
- Sneda asympoter $y = \pm x$.
- Stationära punkter:

$$h'(x) = \frac{2x - \frac{2}{x^3}}{2\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}} = 0 \iff x = \pm 1$$

Teckenschema: Tecknet på derivatan beror endast på täljaren, som är

x	$<$	-1	$<$	0	$<$	1	$<$
$h'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$h(x)$	$\searrow$	$\min = \sqrt{2}$	$\nearrow$	Ej def.	$\searrow$	$\min = \sqrt{2}$	$\nearrow$