1 Föreläsning VIII

1.1 Lite om konvex och konkav funktionskurva

Definition (Lätt variant)

En funktion är konvex (konkav), om sekanterna ligger över (under) funktionskurvan

---

Ex1.40 En "glad" parabel, såsom $y = f(x) = x^2 - 3x + 2$ är konvex.

Ex 1.41 Var är $y = x^3 - 3x + 2$ konvex respektive konkav?

Lösning

Vi ritar kurvan och finner att den är konkav för $-\infty < x \leq 0$ och konvex för $0 \leq x < \infty$.
Men hur kan vi avgöra det mer tekniskt?
Vi ser att i intervallet $(-\infty, 0]$ är $f'(x)$ avtagande. Detta följer av att

$$f''(x) = 6x \begin{cases} \leq 0 \text{ om } x \leq 0 \\ \\ \geq 0 \text{ om } x \geq 0 \end{cases}$$

Vi kan konstatera att tecknet på andraderivatan ger besked var funktionen är konkav respektive konvex.

Sats
- Om $f''(x) \geq 0$ i ett intervall, är funktionen konvex.
- Om $f''(x) > 0$ i ett intervall, är funktionen strängt konvex.

- Vi ser också att en funktion är konvex (konkav) i en omgivning av en minimipunkt (maximipunkt). Vi formulerar detta som att
Antag att $f'(x_0) = 0$ och $f''(x_0) < 0$. Då är $(x_0, f(x_0))$ en maximipunkt, d.v.s. f har lokalt maximum i x_0.

Ex 1.42 Med $f(x) = x^3 - 3x + 2$, så är $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$ med stationära punkter i $x_= \pm 1$. Är de min-, max- eller terrasspunkter?

$$f''(x) = 6x \text{ och } f''(-1) = -6 < 0.$$

Alltså är $(-1, 4)$ en lokal maximipunkt. P.s.s. är $(1, 0)$ en lokal minimipunkt.

Ex 1.43 Givet funktionen $g(x) = x^4$. Dess enda stationär punkt ges av $x = x_0 = 0$. $g''(x) = 12x^2$ så att $g''(0) = 0$. Vi vet att $x_0 = 0$ motsvarar en minimipunkt även om $g''(0) = 0$, d.v.s. andraderivatan ger inget besked, om vilken typ av stationär punkt vi har.

- Vi ser av föregående exempel att vi inte har ekvivalens. I själva verket gäller att

$$\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ \text{och} \\ f''(x_0) > 0 \end{cases} \implies (x_0, f(x_0)) \text{ är en lokal minimipunkt.}$$

Definition En funktion definierad i ett intervall I är konvex om för varje par x_1 och $x_2 \in I$ och för varje $\lambda : 0 < \lambda < 1$ gäller att

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2). \tag{1}$$

Om $-f(x)$ är konvex, är $f(x)$ konkav.
Om olikheten är sträng, är funktionen strängt konvex.

- Man kan ges följande alternativa definition av konvex funktion i ett intervall I.
  $f(x)$ är konkav i intervallet I, om för alla $x_1 < x_3 < x_2$, alla $x_j \in I$, gäller att
  $$\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3} \tag{2}$$

Kommentar: Det betyder att sekanternas riktningskoefficienter är växande.

Ex 1.44 För vilka x är funktionen $f(x) = x^3 + ax^2 + x$ konvexa resp. konkava för olika värden på a?

Lösning

$$f''(x) = 6x + 2a \geq 0 \text{ för } x \geq -\frac{a}{3}.$$

För dessa x är alltså funktionen konvex.

Diskussion Hur hänger konvexitet ihop med kontinuitet i ett intervall? Kan man tänka sig ett ”hopp” i en punkt för en funktion f, d.v.s. en diskontinuitet i en punkt men att $f(x)$ är konvex?

- Tolkning av derivata för $y = y(t)$, där variabeln är tid t.

  1. Med $s = s(t)$ som läget för en partikel vid tiden t år dess hastighet v (per definition)
     $$v = v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}.$$
     Dess acceleration är
     $$a = a(t) = v'(t) = \frac{dv}{dt} = s''(t) = \{\text{som skrivs}\} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$
  2. All ändring per tidsenhet är att uppfattas som hastighet. Man talar ex.vis om ”volymhastighet”.
  3. Vid fritt fall utan luftmotstånd räknar man med konstant (tyngd-)acceleration $a = g =9.82$ m/s^2.
  4. Man säger att man deriverar m.a.p. *tiden*, t och kallar det *tidsderivata*.

Linearitet För derivata gäller att

$$D(f(x) + g(x))) = f'(x) + g'(x) \text{ och } D(a\, f(x)) = af'(x).$$

Detta kallas *linearitet* hos derivata.

1.2 Integralkalkyl

Man är i många situationer intresserad i arean av ytan mellan funktonskurvan, $x - axeln$, där $a \leq x \leq b$ för några a och b.

Ex 1.45 En cykeltur körs under våren där hastigheten är $v = 30$km/h och turen tar 4h. Genom att rita v som funktion av tiden t får vi en kurva (en lnje). Arean mellan $y = v = 30$ och $y = 0$ ($x-$axeln) där $0 \leq t \leq 4$ (h) är den körda sträckan. Den fås som $30 \cdot (4 - 0) = 120$ km. Detta är i princip en *integral*. Formellt tecknar man den som

$$\int_0^4 30\, dt = \{\text{och beräknas så här}\} = [30t]_0^4 = 30(4 - 0) = 120.$$

$30t$ är en primitiv funktion vars derivata är just 30.

Ex 1.46 Beräkning av area mellan funktionskurva och $x-$axeln m.h.a. rektanglar. Betrakta funktionen $f(x) = x^2$.

(a) Beräkna undersumma och översumma genom att dela in intervallet $[0, 1]$ i $n = 3$ lika långa delar

(b) P.s.s. som i (a) men med n lika delar.

(c) Låt $n \longrightarrow \infty$. Vilka värden konvergerar under- och översummor?

Lösning

(a) Delintervallens längder är $\Delta x := \dfrac{1}{3}$. Undersumman är

$$U_3 := (f(0) + f(1/3) + f(2/3)) \cdot \Delta x = \left(\frac{0}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}\right) \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{27}.$$

Översumman

$$O_3 := (f(1/3) + f(2/3) + f(3/3)) \cdot \Delta x = \left(\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{9}{9}\right) \cdot \frac{1}{3} = \frac{14}{27}.$$

(b) P.s.s. som i (a) men med n lika delar:

$$U_n := \sum_{k=0}^{n-1} f(k/n) \cdot \Delta x = \sum_{k=0}^{n-1} (k/n)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} k^2$$

$$O_n := \sum_{k=1}^{n} f(k/n) \cdot \Delta x = \sum_{k=0}^{n-1} (k/n)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2$$

(c) Här måste vi ha en sluten formel för summorna.
Vi börjar med

$$\sum_{k=1}^{n} k^2.$$

Eftersom vi kan göra Induktionsbevis, ges det slutna uttrycket och vi bevisar det med induktion.

Sats

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad n = 1, 2, ... \tag{3}$$

Alltså bevis med induktion.

(i) Vi visar att (3) för $n = 1$. Då är VL$= 1^1 = 1$.
HL$= \dfrac{1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)}{6} = 1$. Stämmer!

(ii) Antag att (3) är sant för n och visa att den är sann för $n+1$.
HL för $n+1$ är
$$\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$
VL för $n+1$ är
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \{\text{Enl. (i)}\} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \\ &= (n+1)\cdot\left[\frac{n(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)}{6}.\right]\end{aligned}$$
Det återstår att visa
$$(n+2)(2n+3) = n(2n+1) + 6(n+1).$$
Genom att utveckla VL och HL får vi
$$2n^2 + 4n + 3n + 6 \text{ respektive } 2n^2 + n + 6n + 6$$
Som ju i båda led är $2n^2 + 7n + 6$. Därmed är (3) sann för alla $n = 1, 2, ...$ enligt Induktionsprincipen.

(c) forts. Det är klart att $U_n \leq O_n$. Vi skriver U_n som
$$U_n = \frac{1}{n^3}\cdot\sum_{k=1}^{n} k^2 - n^2 = \frac{1}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n^2\right].$$
Vi har att
$$U_n = \frac{1}{6}\cdot(1+1/n)(2+1/n) - \frac{1}{n} \leq O_n = \frac{1}{6}\cdot(1+1/n)(2+1/n).$$
Låt nu $n \longrightarrow \infty$ och vi får att både U_n och O_n konvergerar mot samma värde $\frac{1}{3}$. Detta *gemensamma* värde $\frac{1}{3}$ är att tolka som arean mellan funktionskurvan, $x-$axeln där $0 \leq x \leq 1$. Formellt skrivs den
$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

Beteckningar

- $\int$ kallas integraltecken (av tyskans "Summe").
- $f(x) = x^2$ kallas integrand.
- $x = a = 0$ kallas under gräns och $x = b = 1$ kallas övre gräns.
- Hela uttrycket i VL kallas *bestämd integral*.
- Man kan beräkna integralen vi *primitiv funktion*:
$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}(1^3 - 0^3) = \frac{1}{3}.$$
Funktionen $F(x) = \frac{x^3}{3}$ är en sådan primitiv funktion. Egenskap:
$$F'(x) = f(x).$$
- I princip kommer alla integraler beräknas m.h.a. primitiv funktion.
- Ex.vis är $F'(x) = \frac{d}{dx}\frac{1}{3}x^3 = x^2 = f(x)$ i exemplet ovan. Vi ser att
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3} + C\right) = x^2$$
alltså oberoende av den *additiva* konstanten C. Man kan visa att *alla* primitiva funktioner har utseendet $\frac{x^3}{3} + C$.

Beräkning av integral Dessa kommer linjearitetsegenskaperna från derivata att gälla integral. Genom att derivera