1 Föreläsning IX

1.1 Integral forts

- Vi ser att för att beräkna integralen av $f(x) = x^2$ i intervallet $[0, 1]$, d.v.s. $\int_0^1 x^2 dx$, använder vi en funktion $F(x) = \dfrac{1}{3}x^3$ vars derivata är $f(x)$. Detta kallas *primitiv funktion*: $F'(x) = f(x)$.

Definition Givet en begränsad funktion $f(x)$ i ett intervall $[a, b]$.
Dela in intervallet i n delintervall

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$$

Låt $u_j \leq f(x)$ på intervallet $[x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, 2, .., n$ och $o_j \geq f(x)$ på samma intervall. Sätt intervallets längd $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$.
Då definieras under - och översumma,

$$U = U_n = \sum_{j=1}^{n} u_j \Delta x_j \text{ respektive } O = O_n = \sum_{j=1}^{n} u_j \Delta x_j$$

Om det då finns *precis ett tal, säg J,* mellan alla under- och översummor, alltså

$$U_m \leq I \leq O_n$$

så är I integralen av $f(x)$ över intervallet $[a, b]$ och skrivs

$$I = \int_a^b f(x)dx. \tag{1}$$

Funktionen $f(x)$ är då *integerbar i Riemanns mening.*

Sats: Antag att $f(x) \geq 0$ då $a \leq x \leq b$ och att $f(x)$ är kontinuerlig där. Då är $f(x)$ integrerbar (i Riemanns mening).

Sats: (Medelvärdessatsen) Antag att $f(x)$ kontinuerlig i $[a, b]$. Då finns ett $\xi \in [a, b]$, sådant att

$$f(\xi)(b - a) = \int_a^b f(x)dx$$

Bevis: f är kontinuerlig, så att största och minsta värde av f existerar som vi kallar $f_{\max}$ resp. f_{min}. Då är $(b - a)f_{\min}$ och $(b - a)f_{\max}$ en under- resp. översumma. Således är

$$(b - a)f_{\min} \leq \int_a^b f(x)dx \leq (b - a)f_{\max}$$

eller ekvivalent

$$f_{\min} \leq \frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)dx =: y \leq f_{\max}.$$

Enligt satsen om mellanliggande värde finns $\xi \in [a, b]$, sådant att

$$f(\xi) = \frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)dx.$$

Insättningsformeln Vi definierar $F_0(x)$ som arean i figuren. Då är $F_0(x + h) - F_0(x)$ approximativt arean av den smala remsan med $t-$gränser x och $x + h$. Denna smala remsa har en area som en rektangel med bredd h och höjd $f(x)$. Alltså finns ξ i intervallet $[x, x+h]$ sådant att

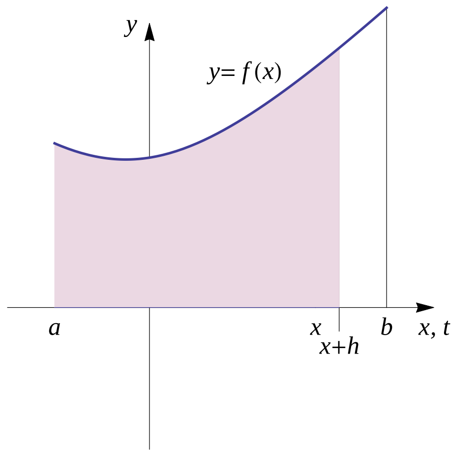
$$F_0(x+h) - F_0(x) = h \cdot f(\xi) \text{ eller } \frac{F_0(x+h) - F_0(x)}{h} = f(\xi).$$

Låt nu $h \to 0$. Då kommer $f(\xi)$ att gå mot $f(x)$ p.g.a. kontinuitet. Således har ändringskvoten ett gränsvärde som måste vara $F'(x)$.
Detta visar att ${F_0}'(x) = f(x)$.

- En funktion $F(x)$, sådan att $F'(x) = f(x)$ kallas *primitiv funktion* till $f(x)$.
- Antag att $G(x)$ är deriverbar i ett intervall med derivata $= 0$. Då är $G(x) = C$, d.v.s. konstant. Speciellt om $G = F_1 - F_2$ och $G' = 0$, så är $F_1' - F_2' = 0$, d.v.s. $F_1 = F_2 + C$.
- Två funktioner F_1 och F_2, som är primitiva funktioner till samma $f(x)$ i ett givet intervall, skiljer sig åt med en additiv konstant:

  $$F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0 \iff F_1(x) - F_2(x) = C \iff F_1(x) = F_2(x) + C\,.$$

- Låt $F(x)$ vara en (annan) primitiv funktion till $f(x)$. Då är $F_0(x) = F(x) + C$.
  * $F_0(a) = 0 = F(a) + C \iff C = -F(a)$, så att $F_0(x) = F(x) - F(a)$.
  * $F_0(b) = \int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$, den s.k. *insättningsformeln.*



- $\int_a^b f(x)dx$ kallas bestämd integral och är ett tal.
- $\int f(x)dx$ kallas *obestämd integral* och betyder *alla* primitiva funktioner till $f(x)$. De är, enligt ovan, $F(x)+C$, där $F(x)$ är *någon* primitiv funktion till $f(x)$.
-
$$\int x^\alpha dx = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, & \text{om } \alpha \neq -1 \\ \ln|x| + C, & \text{om } \alpha = -1 \end{cases}$$
- $\int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan x + C$, eftersom $\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{x^2+1}$.
- $\int \tan x\, dx = C - \ln|\cos x|$, eftersom $\frac{d}{dx}(-\ln|\cos x|) = -\frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = \tan x$.

- $\displaystyle\int_6^9 \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_6^9 = \ln(3/2)$, eftersom $\displaystyle\frac{d}{dx}\ \ln x = \frac{1}{x}$.
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \ln|\tan(x/2)| + C$, eftersom $\displaystyle\frac{d}{dx}\ \ln|\tan(x/2)| = \frac{1}{\sin x}$.
- $\displaystyle\int e^{3x} dx = \frac{1}{3}\,e^{3x} + C$.
- $\displaystyle\int \sin^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$.
- $\displaystyle\int \sin^3 x dx = \int (1-\cos^2 x)\sin x\,dx = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$.
- $\displaystyle\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}\,a^x + C$ och p.s.s. $\displaystyle\int e^{k\,x} dx = \frac{1}{k}\,e^{k\,x} + C$.
- Bestäm *en* primitiv funktion till $\sqrt{2x}$, bestäm alla primitiva funktioner till $\sqrt{2x}$ och bestäm $\displaystyle\int_2^8 \sqrt{2x}\,dx$.

  Lösning:

  (*En* primitiv funktion)

  $$f(x) := (2x)^{1/2} \Longleftarrow F(x) = \frac{2}{3}(2x)^{3/2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2}{3}\cdot x\sqrt{2x}.$$

  (*alla* primitiva funktioner)

  $$\frac{2}{3}\cdot x\sqrt{2x} + C$$

  (En bestämd integral)

  $$\int_2^8 f(x)dx = \left[\frac{2}{3}\cdot x\sqrt{2x}\right]_2^8 = \frac{56}{3}.$$

En liten regel Om $f(x)$ har primitiv funktion $F(x)$, har $f(kx+m)$ primitiv funktion $\dfrac{1}{k}\,F(kx+m)$ för $k \neq 0$; När den inre funktionen är ”linjär”, d.v.s. $z = kx+m$ kan man ”kompensera” för den inre derivatan genom att dividera med k, ex.vis

$$\int \sqrt{3x+1}dx = \int (3x+1)^{1/2}\,dx = \frac{2}{3}(3x+1)^{3/2}\cdot\frac{1}{3} + C = \frac{2(3x+1)\sqrt{3x+1}}{9} + C.$$

Tre moment vid beräkning av integral

1. Omskrivning av integranden *innan* integration.
2. Integration, d.v.s. bestämning av primitiv funktion och eventuellt insättning av övre och undre gräns.
3. Omskrivning/förenkling av svaret.

Derivata och integral

I Ex.vis är $\displaystyle\int 2x\,dx = x^2 + C$ och därefter $D(x^2+C) = 2x$. Allmänt är $\displaystyle\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx\right] = f(x)$.
Integral och derivata tar ut varandra i den ordningen.

II Ex.vis är $\displaystyle\frac{d}{dx}\,x^2 = 2x$ och därefter $\displaystyle\int 2x\,dx = x^2 + C$. Allmänt är $\displaystyle\int\left[\frac{d}{dx}f(x)\right]\,dx = f(x) + C$.
Derivata och integral tar ut varandra i den ordningen, nästan.

- Eftersom derivering har linjära egenskaper, så har även integraler det:

  $$\int (a\,f(x) + b\,g(x))dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx.$$

  P.s.s. för bestämd integral.
  Bevis genom att derivera båda led.

1.2 Integrationsmetoder

1.2.1 Partiell integration

P.I. , som är förkortning för *partiell integration*. Med den fixar man en integrand, som är en produkt. Den bygger på att derivatan av produkt. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$. Vi integrerar båda led:

$$\int (u\,v)' dx = u\,v = \int u' v\,dx + \int u\,v'\,dx.$$

Vi flyttar om termerna och får

$$\int u' v\,dx = u\,v - \int u\,v'\,dx\,.$$

Här gör man ett byte och sätter $F(x) = u(x)$, så att $F'(x) = f(x) = u'(x)$ samt $v(x) = g(x)$. Då erhålls

$$\int f(x)g(x)\,dx = F(x)\,g(x) - \int F(x)\,g'(x)\,dx \tag{2}$$

Ex 47: Beräkna integralen

$$\int_0^2 (x-2)e^{-x/2}dx.$$

Lösning:

Vi kan först bestämma en primitiv funktion.

$$\int \underbrace{(x-2)}_{=g(x)}\underbrace{e^{-x/2}}_{=f(x)}dx = (x-2)(-2)e^{-x/2} + 2\int e^{-x/2}dx.$$

En primitiv funktion är alltså

$$-2xe^{-x/2} \text{ så att } \int_0^2 (x-2)e^{-x/2}dx = \Big[2xe^{-x/2}\Big]_2^0 =$$

$$-\frac{4}{e}.$$

Ex 48: Beräkna $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx.$

Lösning:

Vi väljer $x = g(x)$ som den funktion som är deriverad i (2) och därmed $f(x) = \sin x$. Vi ser att

$$\int x\sin x\,dx = x(-\cos x) - \int 1\cdot(-\cos x)dx = \sin x - x\cos x + C$$

så att

$$\int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx = [\sin x - x\cos x]_0^{\pi/2} = 1.$$

1.3 Variabelsubstition

V.S. , som är förkortningen för *variabelsubstitution*.

$$\int f(x)\,dx = \int f(x(t))\cdot\frac{dx}{dt}\,dt. \tag{3}$$

Man sätter alltså $x = x(t)$, d.v.s. gör x till en funktion av en ny variabel t. När man gör V.S. ser det dock inte ut, riktigt som att man gör x till en funktion av t. Vi kan enkelt bevisa (3) genom att derivera båda sidor m.a.p. t.

Ex 49: Betäm en primitiv funktion till $\dfrac{1}{x^2+4}$.

Lösning:

Vi gör omskrivningen $\dfrac{1}{x^2+4} = \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{(x/2)^2+1}$.

$$\int \frac{1}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{(x/2)^2+1}\,dx = \{x = 2t,\ dx = 2dt\} =$$

$$\frac{1}{4}\cdot 2\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{2}\arctan t + C.$$

Svar: En primitiv funktion är $\dfrac{1}{2}\arctan(x/2)$.

Ex 50: Bestäm en primitiv funktion till $\tan x$.

Lösning:

$$\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \left\{ \begin{array}{c} \cos x = t,\ \dfrac{dt}{dx} = \dfrac{d}{dx}\cos x = -\sin x \\ dt = -\sin x\,dx,\ \text{d.v.s. täljaren med fel tecken.} \end{array} \right\} =$$

$$\int -\frac{1}{t}\,dt = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

Svar: En primitiv funktion till $\tan x$ är $-\ln|\cos x|$.

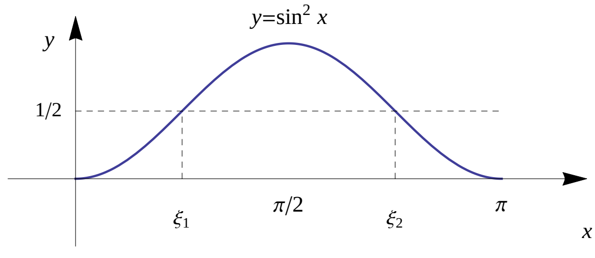
Ex 51: Beräkna (a) $\displaystyle\int_0^\pi \sin^2 x\,dx$, (b) $\displaystyle\int \sin^3 x\,dx$.

Lösning:

(a) Detta är en bestämd integral. Vi skriver om integranden som $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$. Alltså är

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}.$$

Kommentar: Vi kan faktiskt bestämma integralens värde med medelvärdessatsen. Vi ritar kurvan!



Det finns *två* ξ, sådana att $f(\xi) = 1/2$. Vad är ξ_1 och ξ_2?

(b) Detta är en obestämd integral. Vi skriver om integranden som $\sin^3 x = \sin^2 x \cdot \sin x = (1-\cos^2 x)\sin x$ och gör V.S. $\cos x = t \Rightarrow -\sin x\,dx = dt$, så att

$$\int \sin^3 x\,dx = \int (1-\cos^2 x)\sin x\,dx = \int (1-t^2)(-1)dt =$$

$$\frac{t^3}{3} - t + C = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C.$$

1.4 Rationell integrand

En sådan funktion $r(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ skall *utvecklas*. Vi antar att p och q är polynom och att r är förkortat så långt som möjligt.

- Om $\operatorname{grad} p \geq \operatorname{grad} q$ så *polynomdivision.*
- Om $\operatorname{grad} p < \operatorname{grad} q$ så *uppdelning i partialbråk.*

Ex 52: Beräkna integralen $\displaystyle\int \frac{2x^3 - x^2 - x + 1}{x^2 - x}\,dx.$

Lösning:

$\operatorname{grad} p = 3 \geq \operatorname{grad} q = 2$, alltså pol. div., som ger

$$r(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x^2 - x}\,.$$

Och nu PBU på den sista termen, ty där har täljaren graden 0 och nämnaren graden 2. Vi faktoriserar nämnaren och ansätter

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1}\,.$$

Ansättningen i täljaren med A och B beror på att dessa har en grad lägre än respektive nämnare. Genom att sätta HL på MGN och identifiera täljarna i VL och HL får man

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{A(x-1)+Bx}{x(x-1)} \iff \begin{cases} & \text{VL} \quad \text{HL} \\ x^0: & 1 = -A \\ x^1: & 0 = A + B \end{cases} \iff A = -1,\, B = 1\,.$$

Alltså kan integralen skrivas

$$\int \left(2x + 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}\right) dx = x^2 + x - \ln|x| + \ln|x-1| + C\,.$$

Ex53a: Derivera funktionen

$$\ln(x^2+4).$$

Lösning:

$$\frac{d}{dx}\ln(x^2+4) = \frac{1}{x^2+4}\cdot 2x = \frac{2x}{x^2+4}.$$

Ex 53b: Bestäm en p.f. till $h(x) = \dfrac{3x+1}{x^3+4x}$.

Lösning:

Integranden är en rationell funktion och skall (alltså) utvecklas. grad tälj< grad nämn. Då faktoriserar vi nämnaren som är $x(x^2+4)$. Man kan visa att följande *ansättning* fungerar.

$$\frac{3x+1}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

där principen är att graden på respektive täljare är av en grad mindre än motsvarande nämnare. Liknämnigt (MGN) ger likheten

$$\frac{3x+1}{x(x^2+4)} = \frac{A(x^2+4)+x(Bx+C)}{x(x^2+4)}.$$

Denna likhet är en identitet och då VL:s och HL:s nämnare är lika, måste deras täljare vara det. Vi får likheten

$$3x + 1 = A(x^2 + 4) + x(Bx + C)$$

så att koefficienterna är lika:

$$\begin{array}{rccc} & \text{VL} & & \text{HL} \\ \hline x^2: & 0 & = & A+B \\ x^1: & 3 & = & C \\ x^0: & 1 & = & 4A \end{array} \iff \begin{cases} A = 1/4, \\ B = -1/4, \\ C = 3 \end{cases}$$

Vi skall alltså beräkna

$$\int \left(\frac{1}{4x} + \frac{-x/4 + 3}{x^2 + 4} \right) dx.$$

Vi får tre termer i den primitiva funktion (samt " $+ C_1$"). Dessa är

$$\frac{\ln x}{4}, \quad -\frac{1}{8}\ln(x^2 + 4), \quad \frac{3}{2}\arctan(x/2).$$

(Jämför ex 49 för den sista termen.)
Svar: En p.f. är

$$\frac{\ln x}{4} - \frac{1}{8}\ln(x^2 + 4) + \frac{3}{2}\arctan(x/2)$$