

1 Implicit derivering

1.1 Vad det begreppet står för

För många uttryck kan y vara en funktion av x även om man inte har ett *explicit* uttryck för y som funktion av variabeln x . Det kan var svårt eller omöjligt att lösa ut y . Ändå kana m n ibland, bestämma $y'(x)$ för vissa x -värden.

Ex: Man kan visa att $4x = y^3 + 3y$ *implicit* (indirekt) definierar en funktion y av variabeln. För att *explicit* lösa ut y uttryckt i x behöver man lösa en tredjegrads ekvation i y .

- (a) Utgå från att y är en funktion av x och bestäm $y(1)$.
- (b) Beräkna $y'(1)$.
- (c) Visa (på något sätt), att y är en funktion av x . Vad är D_y ?

Lösning:

- (a) Insättning av $x = 1$ i ekvationen ger

$$4 \cdot 1 = y^3 + 3y.$$

En rot är $y = 1$, så att $y(1) = 1$.

- (b) Vi deriverar ekvationens båda led m.a.p. x .

Derivatan av y m.a.p. x sker när y endast ges implicit.
Därav begreppet implicit derivering.

Det ger

$$4 = (3y^2 + 3) \cdot y'.$$

Insättning av $x = 1$ ger (obs $y = 1$ då $x = 1$ enligt (a)). Alltså

$$4 = (3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1) \cdot y'(1) \iff y'(1) = \frac{2}{3}.$$

- (c) Vi ser att $x = x(y)$, d.v.s. x är en funktion av y :

$$x = x(y) = \frac{1}{4} (y^3 + 3y).$$

Denna funktion har derivata

$$x'(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{3}{4} (y^2 + 1) > 0 \text{ för alla } y \in \mathbb{R}.$$

Det betyder att $x = x(y)$ är en *strängt växande funktion på ett intervall* ($\mathbb{R}$). Således har x en invers som är $y = y(x)$.

Kommentarer: ■ I detta fall kan man explicit lösa ut y som funktion av x . Den är

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{\sqrt{4x^2+1}-2x}} - \sqrt[3]{\sqrt{4x^2+1}-2x}.$$

Speciellt är ju $y(1) = 1$. Med uttrycket ovan blir

$$y(1) = \frac{1}{\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$$

Som faktiskt kan förenklas till 1.

- Om, för en funktion y vi har att $y'(x_0) \neq 0$ och $y'(x)$ kontinuerlig, så har y en invers i en omgivning till x_0 .

