1 Kryssuppgifter III, L9MA20 och LGMA20, vt 2017 för redovisning 12:e maj

1. Betrakta funktionen $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{, om } x \leq 0 \\ \\ e^{-1/x} & \text{, om } x > 0 \end{cases}$

   (a) Konstruera kurvan $y = f(x)$ (med angivande av stationära punkter, asymptoter och var funktionen är konvex eller konkav). 2p

   (b) Visa att både $f'(0)$ och $f''(0)$ existerar genom att Beräkna dessa. Kan man dra slutsatsen att $f^{(n)}(0)$ existerar för alla $n = 0, 1, 2, ...$? 1p

   (c) En typ av funktion som används i högre matematik, är en funktion, sådan att den är $f(x) \neq 0$ endast i ett begränsat intervall (a, b) och $f^{(n)}(x)$ existerar för alla $x \in \mathbb{R}$. Konstruera en sådan funktion med utgångspunkt att $f^{(n)}(0)$ existerar för vår funktion ovan. Rita en sådan kurva med Geogebra där $a = -1$ och $b = 2$. 2p

2. Betrakta funktionen $f(x) = \dfrac{x^3}{e^x - 1}$.

   (a) Konstruera kurvan för $x > 0$. För en stationär punkt kan vi inte få ett exakt analytiskt värde. Ge ett approximativt (numeriskt) värde (Försök med Newton-Raphsons metod)för den stationära punkten. 1p

   (b) Integralen $\int_0^\infty f(x)dx$ är inte elementär, vilket betyder att vi inte kan beräkna den med P.I. eller V.S.
   Ändå kan man visa att

   $$\int_0^\infty f(x)dx = \frac{\pi^4}{15}.$$

   Beräkna m.h.a. resultatet ovan, integralen

   $$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x + 1} dx.$$

   Ledning: Ett algebraiskt knep är att utnyttja konjugatregeln för uttrycket $e^{2x} - 1$ *efter en lämplig V.S.* 3p