Sammanfattning IXc

- **Derivata och integral**

$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$$

$$\int \frac{d}{dx} f(x)dx = f(x) + C$$

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$ och allmänt $$\frac{d}{dx}\int_a^{g(x)} f(t)dt = f(g(x))g'(x)$$

P.I. Partiell integration:

$$\int f(x)g(x)dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = [F(x)g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx.$$

Tillräckligt villkor: $F'(x) = f(x)$ och $g'(x)$ kontinuerliga, respektive
$F'(x) = f(x)$ och $g'(x)$ kontinuerliga i $[a, b]$.

V.S. Variabelsubstitution:

$$\int f(x)dx = \int f(x(t))x'(t)dt, \qquad \int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x(t))x'(t)dt.$$

Tillräckligt villkor: $f(x)$ och $x'(t)$ kontinuerliga, resepektive
$f(x)$ kontinuerlig i $[a, b]$, $x'(t)$ kontinuerlig i $[\alpha, \beta]$ och
$x(\alpha) = b, \quad x(\beta) = b.$

Rationell integrand

En rationell funktion (integrand) $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, p och q polynom utan gemensamma faktorer, utvecklas:

$$\begin{array}{lcc} \operatorname{grad} p \geq \operatorname{grad} q & \Longrightarrow & \text{polynomdivision} \\ & & \downarrow \\ \operatorname{grad} p < \operatorname{grad} q & \Longrightarrow & \text{PBU} \end{array}$$

Ex:

$$\frac{x-4}{x^2-4} = \frac{x-4}{(x-2)(x+2)} = \{\text{ansättning}\} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}.$$

Ex:

$$\frac{x-4}{x^3-4x} = \frac{x-4}{x(x-2)(x+2)} = \{\text{ansättning}\} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2}.$$

Ex:

$$\frac{x-4}{x^3+4x} = \frac{x-4}{x(x^2+4)} = \{\text{ansättning}\} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}.$$

- Princip för ansättning:
  Ansätt med termer som är bråk och har nämnare som en faktor i VL
  och
  täljare ansätts som ett polynom av en grad lägre än nämnaren.

Rekommendationer vid P.I.

Låt $p = p(x)$ vara ett polynom och $k \neq 0$.
För integrand, som är en produkt

$$p(x) \cdot \begin{cases} e^{kx} \\ \\ \sin kx \\ \\ \cos kx \end{cases}$$

välj $p(x) = g(x)$.
För integrand, som är en produkt

$$p(x) \cdot \begin{cases} \ln x \\ \\ \arctan kx \\ \\ \arcsin kx \end{cases}$$

välj $p(x) = f(x)$.