Sammanfattning IX

- **Definition av under- och översumma**

  Givet en begränsad funktion $f(x)$ definierad i ett intervall $[a, b]$. Betrakta en indelning av intervallet i n delintervall.

  $$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b.$$

  Låt $u_j \leq f(x)$ i delintervallet $[x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, 2, ..., n$ och $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$.
  En undersumma

  $$U = U_n = \sum_{j=1}^{n} u_j \Delta x_j. \qquad (1)$$

  Låt p.s.s. $o_j \geq f(x)$ i delintervallet $[x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, 2, ..., n$. En översumma

  $$O = O_n = \sum_{j=1}^{n} o_j \Delta x_j. \qquad (2)$$

- **Definition av bestämd integral**

  En begr. funktion f som ovan är integrerbar (i Riemanns mening), om det finns precis ett tal I, mellan alla under- och översummor.

Sats: Om f kontinuerlig, så är f integrerbar.

Sats: (Medelvärdessatsen)

Antag att $f(x)$ kontinuerlig i $[a, b]$, $a < b$.
Då finns ett $\xi \in [a, b]$, sådant att

$$(b - a)f(\xi) = \int_a^b f(x)dx \qquad (3)$$

Sats: Antag f kontinuerlig i $[a, b]$. Definiera

$$F_0(x) := \int_a^x f(t)dt \text{ för } a \leq x \leq b.$$

Då är $F_0'(x) = f(x)$.

Defintion: En funktion $F(x)$ sådan att $F'(x = f(x)$, är *primitiv funktion* till $f(x)$.

Sats: Om $F(x)$ är en primitiv funktion till $f(x)$ ovan, så är

$$F_0(x) = F(x) + C.$$

$$\underset{\text{(Bestämd intgral)}}{\int_a^b f(x)dx} = \underset{\text{(Insättningsformeln)}}{[F(x)]_a^b = F(b) - F(a).}$$

$$\underset{\text{(Obestämd integral)}}{\int f(x)dx} = F(x) + C.$$

Kommentarer:

1. Två primitiva funktioner (I detta fall $F_0(x)$ och $F(x)$) Är lika sånär som på en additiv konstant.
2. Den andra likheten kallas *insättningsformeln.* VL kallas *bestämd integral* och är ett tal.
3. Den tredje likheten är *alla* primitiva funktioner till $f(x)$ och VL kallas *obestämd integral.*