Lösning till tentamen i matematisk analys för högstadie - och gymnasielärare på Göteborgs universitet, L9MA20/LGMA20, 20170602, 08.30-12.30

1. Beräkna följande gränsvärden...

   (b)
$$\lim_{x\to-3}\frac{3x^2+7x-6}{2x^2+x-15}=\lim_{x\to-3}\frac{(x+3)(3x-2)}{(x+3)(2x-5)}=\lim_{x\to-3}\frac{3x-2}{2x-5}=\frac{3(-3)-2}{2(-3)-5}=1.$$

   (a)
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2+7x-6}{2x^2+x-15}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-2}{2x-5}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3-2/x}{2-5/x}=\frac{3}{2}\,.$$

   (c)
$$\lim_{x\to\infty}(1-2/x)^{x/4}=\lim_{x\to\infty}\left[(1+1/(-x/2))^{-x/2}\right]^{-1/2}=e^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

1.0p, 1.0p, 2.0p

2. Beräkna följande integraler

   (a) $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\sin^3 x\,dx=0$ eftersom integranden är udda och intervallet symmetriskt.

   (b)
$$\int_1^e x\ln x\,dx=\{\text{P.I.}\}=\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e-\frac{1}{2}\int_1^e\frac{x}{2}\,dx=\frac{1}{4}\left(e^2+1\right)$$

   (c)
$$\begin{aligned}\int_0^2\frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx &= \int_0^2\frac{x+1-1}{\sqrt{x+1}}\,dx=\int_0^2\frac{x+1-1}{\sqrt{x+1}}\,dx=\\ &= \int_0^2\left((x+1)^{1/2}-(x+1)^{-1/2}\right)dx=\left[\frac{2(x+1)^{3/2}}{3}-2\sqrt{x+1}\right]_0^2=\\ &= \frac{2}{3}(3\sqrt{3}-1)-2(\sqrt{3}-1))=\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

1.0p, 1.5p, 1.5p

3. Konstruera kurvan $y=\dfrac{x^3}{x^2-3}=:g(x)$...

   Lösning

   $D_g=\{x:\ x\neq\pm\sqrt{3}\}$ och funktionen är udda:
$$g(-x)=\frac{(-x)^3}{(-x)^2-3}=-\frac{x^3}{x^2-3}=-g(x).$$

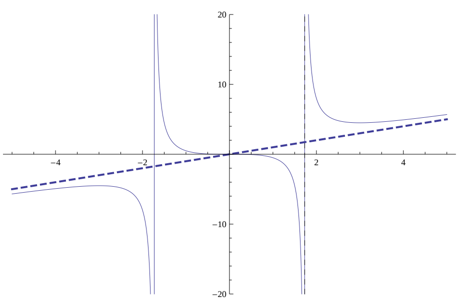
   Lodräta asympoter $x=\pm\sqrt{3}$:
$$g(x)\longrightarrow\begin{cases}-\infty \text{ då } x\to-\sqrt{3}_-\\[2ex] \infty \text{ då } x\to-\sqrt{3}_+\end{cases}$$

   Sned asymptot:
$$g(x)=\frac{x^3-3x+3x}{x^2-3}=x+\frac{3x}{x^2-3}\Longrightarrow \text{Sned asympot } y=x.$$

   Stationära punkter ges av
$$g'(x)=\frac{3x^2(x^2-3)-x^3\cdot 2x}{(x^2-3)^2}=\frac{x^2(x+3)(x-3)}{(x^2-3)^2}=0\Longleftrightarrow\begin{cases}x=\pm3\\[2ex] x=0\end{cases}$$

   Teckenschema:

x	$<$	-3	$<$	$-\sqrt{3}$	$<$	0	$<$	$\sqrt{3}$	$<$	3	$<$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	Exist. ej	$-$	0	$-$	Exist. ej	$<$	0	$+$
$g'(x)$	$\nearrow$	$-9/2$	$\searrow$	Exist. ej	$\searrow$	0	$\searrow$	Exist. ej	$\searrow$	$9/2$	$\nearrow$



3.0p

4. Givet ytan som begränsas av $y = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2+1}}$, $y = 0$, samt linjerna, där $1 \le x < \infty$. Sätt volymen av kroppen som erhålls då ytan roterar kring $x-$axeln till V_0.

$$
\begin{aligned}
V_0 &= \pi \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(x^2+1)} = \left\{ \begin{array}{c} \text{PBU} \quad \dfrac{1}{x^2(x^2+1)} = \dfrac{A}{x^2} + \dfrac{B}{x^2+1} = \\ \dfrac{A(x^2+1)+Bx^2}{x^2(x^2+1)} \iff \\ A = 1, \quad B = -1 \end{array} \right\} = \lim_{b\to\infty} \pi \int_1^b \left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}\right] dx \\
&= \{\text{P.f.} \ -1/x - \arctan x\} = \pi \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{b} - \arctan b + \frac{1}{1} + \arctan 1\right] = \pi - \frac{\pi^2}{4} \text{ v.e. (Svar)}
\end{aligned}
$$

2.0p

5. Givet ett rätblock utan lock... Volymen $V = 2a^2b = 36$ och arean $A = 6ab + 2a^2$. Villkoret på V ger $b = \dfrac{18}{a^2}$, så att

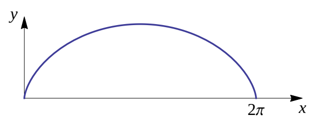
$$
A = A(a) = \frac{6\cdot 18}{a} + 2a^2 \Rightarrow A'(a) = -\frac{6\cdot 18}{a^2} + 4a = 0 \iff a = 3 \text{ och } A''(a) = \frac{2\cdot 6\cdot 18}{a^3} + 4 > 0 \text{ om } a > 0
$$

och alltså ett minimum. Det ger att $b = \dfrac{18}{3^2} = 2$. Den minimala ytans area är alltså $A(3) = 54\,\mathrm{m}^2$ och motsvarande sidolängder är $a = 3$, $2a = 6$ och $b = 2$ m. 3.0p

6. Givet kurvan $t \curvearrowright (t - \sin t, 1 - \cos t) = \boldsymbol{r}(t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

   (a) Skissa kurvan och beräkna dess längd...

   Lösning



$$
\begin{aligned}
L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}\, dt = \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\, dt = 2\int_0^{2\pi} \sin(t/2) dt = -4[\cos(t/2)]_0^{2\pi} = 8 \text{ l.e. (Svar)}
\end{aligned}
$$

2.0p

   (b) Kurvan begränsar, tillsammans med $x-$axeln en yta. Beräkna ytans area..

   Lösning

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2 dt = \int_0^{2\pi} [1 - 2\cos t + \cos^2 t] dt = \\
&= \int_0^{2\pi} \left[1 + \frac{1+\cos 2t}{2}\right] dt = \frac{3}{2}\cdot(2\pi - 0) = 3\pi.
\end{aligned}
$$

2.0p

7. Teori 3.0p