1 Föreläsning III

1.1 Bildandet av nya funktioner

M.h.a. de elementära funktioner bildar man ny genom summa, differens, produkt och kvot. Dessutom finns *sammansätttnng*. Ex.vis med $f(x) = \sin x$ och $g(x) = x^2$ är den sammansatta funktionen

$$f(g(x)) = \{g(x) =: z = x^2\} = g(z) = f(x^2) = \sin(x^2)$$

och

$$g(f(x)) = \{f(x) =: z = \sin x\} = f(z) = g(\sin x) = \sin^2 x.$$

I det första fallet är $g(x) = z = x^2$ *inre funktion* och $f(z) = \sin z$ *yttre* funktion. I det andra fallet är $f(x) = z = \sin x$ *inre funktion* och $g(z) = z^2$ *yttre* funktion.

1.2 Gränsvärde och kontinuitet

Vi utgår från att *alla* elementära funktioner är kontinuerliga (på respektive definitionsmängd). Ex.vis är $h(x) = \cos x$ kontinuerlig och speciellt i $x = a = 0$:

$$\lim_{x \to 0} \cos x = \cos 0 = 1.$$

Vidare gäller att (Kommer att bevisas vid lämpligt tillfälle.)

1. $f(x)$ kontinuerlig $\Longrightarrow c \cdot f(x)$ kontinuerlig.
2. $f(x)$ och $g(x)$ kontinuerliga $\Longrightarrow f(x) \pm g(x)$ kontinuerlig.
3. $f(x)$ och $g(x)$ kontinuerliga $\Longrightarrow f(x) \cdot g(x)$ kontinuerlig.
4. $f(x)$ och $g(x)$ kontinuerliga $\Longrightarrow \dfrac{f(x)}{g(x)}$ kontinuerlig, där $g(x) \neq 0$.
5. $f(z)$ och z=$g(x)$ kontinuerliga $\Longrightarrow f(g(x))$ kontinuerlig.

1.3 Instängninglagen

Innan vi formulerar den och bevisar den skall vi titta lite mer på abolutbelopp och olikheter. Olikheten $|A - B| < \varepsilon$ kan skrivas $-\varepsilon < A - B < \varepsilon$ och vice versa.

Sats

Instängninglagen
Antag att $f(x) \to A$, $g(x) \to A$ då $x \to a$ samt antag att

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x).$$

Då gäller även att $h(x) \to A$, då $x \to a$.

∎

Bevis

Tag ett godtyckligt $\varepsilon > 0$. Då finns $\delta_1 > 0$ och ett $\delta_2 > 0$, sådana att

$$|x-a| < \delta_1 \Longrightarrow |f(x)-A[< \varepsilon \text{ och } [|x-a| < \delta_2 \Longrightarrow |g(x)-A[< \varepsilon.$$

Låt nu $\delta := \min(\delta_1, \delta_2)$ och tag $x: \ |x-a| < \delta$. Då gäller

$$-\varepsilon < f(x) - A \leq h(x) - A \leq g(x) - A < \varepsilon$$

Som implicerar att

$$|h(x) - A| < \varepsilon \text{ d.v.s. } h(x) \longrightarrow A \text{ då } x \longrightarrow a$$

V.S.B.

∎

1.4 Några standardgränsvärden

1. Gränsvärdet
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{1}$$
Låt oss tolka vad det innebär. Först och främst är x i radianer. Ex.vis motsvaras $360°$ av 2π. Kvoten $\frac{180°}{\pi} = 57.3\ldots°$ används för att räkna om radianer till grader:
$$x \text{ i radianer motsvarar } \frac{180°}{\pi} \cdot x \text{ (grader).}$$
Ex.vis
$$\frac{\pi}{6} \text{ blir i grader } \frac{180°}{\pi} \cdot \frac{\pi}{6} = 30°.$$

2. (1) innebär att $\sin x \approx x$ om $|x|$ är liten och i radianer.

Ex: En backe lutar 10%. Vilken är vinkeln mellan backen och horisontalplanet?

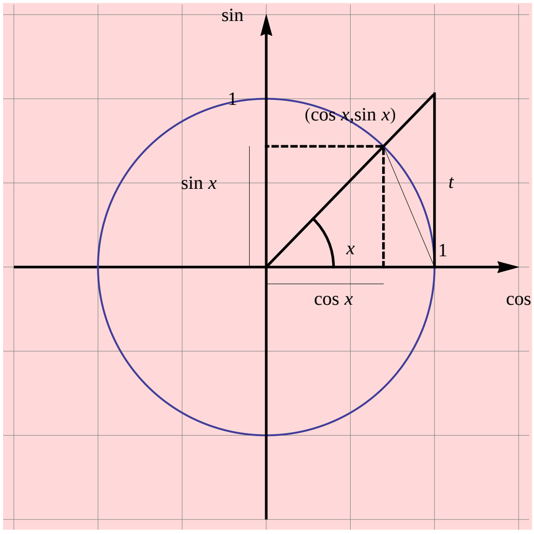
Lösning

Vi får att $\sin x = 10\% = 0.1 \approx x$ eftersom 0.1 är en ett litet tal. Vad blir detta i grader? Vi får att

$$x \text{ (i grader)} = 0.1 \cdot \frac{180°}{\pi} \approx 5.7°.$$

Backen lutar (som mest) 5.7°.

Bevis



För att bestämma t betraktar vi den rätvinkliga triangeln med t som höjd och med bas 1. Denna triangel är likformig med den lilla rätvinkliga triangeln med höjd $\sin x$ och bas $\cos x$. Detta ger

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{t}{1} \text{ alltså att } \tan x = t.$$

För $0 < x < \pi/2$ ger enhetscirkeln

Area av liten triangel		Area av cirkelsektor		Area av stor triangel
$\frac{\sin x \cdot 1}{2}$	$\leq$	$\frac{x \cdot 1^2}{2}$	$\leq$	$\frac{1 \cdot \tan x}{2}$

som ger

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1.$$

Nu ser vi $f(x) = \cos x$, $h(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ och $1 \equiv g(x)$. Eftersom $\cos x \to \cos 0 = 1$ ger instängninslagen att $h(x) = \dfrac{\sin x}{x} \longrightarrow 1$ då $x \to 0_+$. Beviset för $x \to 0_-$ fås genom en liten modifikation av beviset i fallet $x \to 0_+$.

$\blacksquare$